Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück

WS 2009/10
29.10.2009

Übungen zu Stochastik II - Blatt 3

(Abgabe: Donnerstag, 05.11.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Sei $\{N_t, t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ. Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass im Intervall $[0, s]$, genau i Ereignisse auftreten unter der Bedingung, dass im Intervall $[0, t]$ genau n Ereignisse eintreten; d. h.
$P(N_s = i \,|\, N_t = n)$ für $s < t, i = 0, 1, \ldots, n$. Um welche Verteilung handelt es sich? (4)

Aufgabe 2

Sei $\{N_t, t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ, und sei T_0 eine von $\{N_t\}$ unabhängige Zufallsvariable mit $P(T_0 = 1) = \frac{1}{2} = P(T_0 = -1)$. Der Prozess $\{T_t\}$ sei gegeben durch $T_t = T_0(-1)^{N_t}$.

(a) Sei t beliebig, aber fest. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass N_t gerade bzw. ungerade ist, $\dfrac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda t})$ bzw. $\dfrac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda t})$ ist. (2)

(b) Sei t beliebig, aber fest. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass T_t gleich $+1$ bzw. -1 ist und bestimme den Erwartungswert und die Varianz von T_t. (3)

(c) Berechne den Korrelationskoeffizienten $\rho(T_s, T_{s+t})$ für beliebige $s \geq 0, t > 0$. (2)

Aufgabe 3

Sei F^s die integrierte Tailverteilungsfunktion einer nichtnegativen Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F, deren Erwartungswert $0 < \mu < \infty$ ist. Zeige, dass gilt: (3)

$$F^s = F \text{ genau dann, wenn } F(x) = (1 - e^{-x/\mu})\mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Aufgabe 4

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$.

Sei $g_{N_t}(s) = \mathbb{E}(s^{N_t}), s \in (0, 1)$ die erzeugende Funktion des Poisson-Prozesses N_t, $l_U(s) = \mathbb{E}(e^{-sU})$ die Laplace-Transformierte von U_i $\forall i$ und $l_{X_t}(s)$ die Laplace-Transformierte von X_t. Zeige:

$$l_{X_t}(s) = g_{N_t}(l_U(s)), s, t \geq 0$$

(4)