Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück WS 2009/10
05.11.2009

Übungen zu Stochastik II - Blatt 4

(Abgabe: Donnerstag, 12.11.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4)

Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion und $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge monoton wachsender rechtsstetiger Funktionen $F_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(x)| < \infty \; \forall x \in \mathbb{R}$ und $\int_{\mathbf{R}} |g(x)| d(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)) < \infty$. Zeige, dass

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) d(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} g(x) dF_n(x).$$

Hinweis: Benutze die Beweistechnik der algebraischen Induktion, d.h. zeige die Aussage zunächst für Indikatorfunktionen g und dann für einfache Funktionen g, d.h. Linearkombinationen von Indikatorfunktionen (evtl. mit ausschließlich positiven Koeffizienten). Zeige im nächsten Schritt, dass die Behauptung auch für eine allgemeine mess- und integrierbare positive Funktion gilt, indem diese durch eine Folge von einfachen Funktionen approximiert wird. Übertrage diese Aussage schließlich auf allgemeine integrierbare Funktionen. Die Rechsstetigkeit von $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ kann ohne Beweis benutzt werden.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ mit $U_i \sim Exp(\gamma)$ $\forall i$, wobei die Intensität von N_t durch λ gegeben sei. Zeige, dass für die Laplace-Transformierte $l_{X_t}(s)$ von X_t gilt:

$$l_{X_t}(s) = e^{-\frac{\lambda t s}{\gamma + s}}, \; \forall s > 0.$$

(4)

Aufgabe 3

(a) Zeige, dass für einen zusammengesetzten Poisson-Prozess $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ mit $\mathbb{E}U_1^2 < \infty$ die Zufallsvariable
$$\frac{X_t - \mathbb{E}X_t}{\sqrt{VarX_t}}$$
für $t \longrightarrow \infty$ asymptotisch standardnormalverteilt ist. (4)

Bitte wenden!

(b) Folgere, dass für eine Folge zusammengesetzter Poisson-Prozesse $\{X_t^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit zugehörigen Intensitäten $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\lambda_n \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$, und gleicher Sprunghöhenverteilung P_U die Zufallsvariable

$$\frac{X_t^{(n)} - \mathbb{E}X_t^{(n)}}{\sqrt{VarX_t^{(n)}}}$$

für $n \longrightarrow \infty$ und jedes beliebige, aber feste $t > 0$ asymptotisch standardnormalverteilt ist. (2)

Aufgabe 4

(a) Schreibe ein Programm, dem als Parameter ein Zeitpunkt t, eine Intensität λ und ein Wert γ übergeben werden und das als Ergebnis den zufälligen Wert eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses mit Charakteristiken $(\lambda, Exp(\gamma))$ zum Zeitpunkt t ausgibt. Berechne den Mittelwert von X_1 für $\lambda = 0.2$ und $\gamma = 0.5$ bei 10000 Realisierungen. (3)

(b) (Bonusaufgabe) Simuliere für $t \in \{1, 10, 100, 1000, 10000\}$ und die Parameter aus (a) jeweils 10000 Realisierungen der asymptotisch normalverteilten Zufallsvariable

$$\frac{X_t - \mathbb{E}X_t}{\sqrt{VarX_t}}$$

und plotte für jeden Zeitpunkt ein Histogramm. (3*)