Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück

WS 2009/10
12.11.2009

Übungen zu Stochastik II - Blatt 5

(Abgabe: Donnerstag, 19.11.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1

An einem Ort U sei das Wetter entweder sonnig, neblig oder regnerisch. Das Wetter dort werde modelliert durch eine Markov-Kette mit den folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten:

		morgen wird es...		
		sonnig	neblig	regnerisch
	sonnig	0.8	0.2	0.0
heute ist es...	neblig	0.4	0.4	0.2
	regnerisch	0.2	0.6	0.2

Angenommen, der 10. Mai sei sonnig. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Wetterzustände sonnig, neblig und regnerisch am 2. September. Hinweis: Zur Berechnung von Matrixpotenzen darf hier `R`, `Maple`, o.ä. verwendet werden. (4)

Aufgabe 2

Seien $E = \{1, ..., \ell\}$ ein endlicher Zustandsraum, D ein beliebiger messbarer Raum, $Z_1, Z_2, \ldots : \Omega \to D$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, und die Zufallsvariable $X_0 : \Omega \to E$ sei unabhängig von $Z_1, Z_2, \ldots$. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to E$ seien durch die Rekursionsgleichung $X_n = \varphi(X_{n-1}, Z_n)$ gegeben, wobei $\varphi : E \times D \to E$ eine beliebige messbare Abbildung sei. Zeige: $X_0, X_1, X_2, \ldots$ ist eine Markov-Kette. (4)

Aufgabe 3

Gegeben seien die Anfangsverteilung $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_\ell)$ und die Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\in E}$ mit $E = \{1, ..., \ell\}$. Die Folge $Z_0, Z_1, ...$ sei eine Folge von unabhängigen und identisch auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Definiere die E-wertige Zufallsvariable X_0 durch:

$$X_0 = k \;\Leftrightarrow\; Z_0 \in \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right], \; k = 1, \dots, \ell,$$

und die Zufallsvariablen $X_1, X_2, ...$ rekursiv über $X_n = \varphi(X_{n-1}, Z_n)$, wobei die Funktion $\varphi : E \times [0,1] \to E$ gegeben ist durch

$$\varphi(i,z) = \sum_{k=1}^{\ell} k \cdot \mathbb{1}\left(\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} < z \leq \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \right).$$

Zeige, dass die Folge $\{X_n\}$ eine zeitdiskrete, homogene Markov-Kette mit Anfangsverteilung α und Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ ist. (4)

Aufgabe 4

Sei $\{\mathbf{P}(h), h \geq 0\}$ eine Familie $\ell \times \ell$-dimensionaler stochastischer Matrizen. Für alle $h_1, h_2 \geq 0$ gelte $\mathbf{P}(h_1 + h_2) = \mathbf{P}(h_1)\mathbf{P}(h_2)$ und $\lim_{h\downarrow 0} p_{ij}(h) = p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

(a) Zeige, dass $p_{ij}(h)$ auf $(0, \infty)$ gleichmäßig stetig in h ist $\forall i, j \in \{1, \dots, \ell\}$. (3)

(b) Zeige, dass $\mathbf{P}(h)$ bzgl. der Matrixnorm $||\mathbf{P}(h)|| = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} |p_{ij}(h)|$ auf $(0, \infty)$ gleichmäßig stetig in h ist. (2)