

## Übungen zu Stochastik II - Blatt 6

(Abgabe: Donnerstag, 26.11.2009, vor den Übungen)

### Aufgabe 1

Sei  $\{X_t : t \geq 0\}$  ein stochastischer Prozess auf dem abzählbar unendlichen Zustandsraum  $E = \mathbb{Z}$  mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, die von  $X_0$  unabhängig sind. Es gelte ferner  $\lim_{h \downarrow 0} P(X_h - X_0 = k) = \delta_{0k}$ . Zeige, dass  $\{X_t : t \geq 0\}$  ein Markov-Prozess ist.

Beachte: Die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen lauten in diesem Fall  $p_{ij}(h_1 + h_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{ik}(h_1)p_{kj}(h_2) \forall i, j \in \mathbb{Z}, h_1, h_2 \geq 0$ . (4)

### Aufgabe 2

Seien  $\lambda, \mu > 0$  und  $\{X_t : t \geq 0\}$  ein Markov-Prozess auf dem Zustandsraum  $E = \{1, 2\}$  mit Intensitätsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne  $p_{ij}(h)$  für  $i, j \in \{1, 2\}$  als Lösungen der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen. (3)

(b) Berechne  $\mathbf{Q}^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  und mit diesem Ergebnis die Matrixexponentialfunktion  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{Q}^n$ . (3)

**Bitte wenden!**

### Aufgabe 3

- (a) Schreibe ein Programm zur Simulation eines Markov-Prozesses  $\{X_t, t \geq 0\}$  mit Zustandsraum  $E = \{1, 2, 3\}$ , mit der Gleichverteilung auf  $E$  als Anfangsverteilung und der Intensitätsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- (b) Führe die Simulation jeweils 1000 mal bis zum Zeitpunkt  $t_0 = 10.0, 100.0$  und  $1000.0$  durch. Bestimme dabei die relativen Häufigkeiten der Zustände, die bei Abbruch der Simulation angenommen wurden. Berechne die stationäre Anfangsverteilung  $\alpha$  von  $\{X_t\}$  und vergleiche die relativen Häufigkeiten damit. (3)
- (c) Führe die Simulation 5000 mal bis zum Zeitpunkt  $t = 1000.0$  aus und visualisiere zu jedem der Zeitpunkte  $5.0, 10.0, 15.0, \dots, 995.0, 1000.0$  die relativen Häufigkeiten der Zustände 1, 2 und 3 mittels eines Scatterplots. (3)