

Übungen zu Stochastik II - Blatt 6

(Abgabe: Donnerstag, 26.11.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Sei $\{X_t : t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess auf dem abzählbar unendlichen Zustandsraum $E = \mathbb{Z}$ mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, die von X_0 unabhängig sind. Es gelte ferner $\lim_{h \downarrow 0} P(X_h - X_0 = k) = \delta_{0k}$. Zeige, dass $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Markov-Prozess ist.

Beachte: Die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen lauten in diesem Fall
$$p_{ij}(h_1 + h_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{ik}(h_1)p_{kj}(h_2) \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}, h_1, h_2 \geq 0. \quad (4)$$

Aufgabe 2

Seien $\lambda, \mu > 0$ und $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Markov-Prozess auf dem Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ mit Intensitätsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $p_{ij}(h)$ für $i, j \in \{1, 2\}$ als Lösungen der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen. (3)

(b) Berechne \mathbf{Q}^n für $n \in \mathbb{N}$ und mit diesem Ergebnis die Matrixexponentialfunktion
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{Q}^n. \quad (3)$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3

- (a) Schreibe ein Programm zur Simulation eines Markov-Prozesses $\{X_t, t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$, mit der Gleichverteilung auf E als Anfangsverteilung und der Intensitätsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

- (b) Führe die Simulation jeweils 1000 mal bis zum Zeitpunkt $t_0 = 10.0, 100.0$ und 1000.0 durch. Bestimme dabei die relativen Häufigkeiten der Zustände, die bei Abbruch der Simulation angenommen wurden. Berechne die stationäre Anfangsverteilung α von $\{X_t\}$ und vergleiche die relativen Häufigkeiten damit. (3)
- (c) Führe die Simulation 5000 mal bis zum Zeitpunkt $t = 1000.0$ aus und visualisiere zu jedem der Zeitpunkte $5.0, 10.0, 15.0, \dots, 995.0, 1000.0$ die relativen Häufigkeiten der Zustände 1, 2 und 3 mittels eines Scatterplots. (3)