Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück

WS 2009/10
03.12.2009

Übungen zu Stochastik II - Blatt 8

(Abgabe: Donnerstag, 10.12.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1

(a) Schreibe ein Programm zur Simulation eines Wiener–Prozesses im Intervall [0,1]. Verwende dabei den folgenden Algorithmus zur Approximation von X_t: $\widetilde{X}_t^{(n)} = S_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\, Z_{\lfloor nt \rfloor + 1}/\sqrt{n}$ für $S_i = Z_1 + \ldots + Z_i$, wobei Z_j i.i.d Zufallsvariablen sind mit $P(Z_1 = 1) = P(Z_1 = -1) = 0.5$. (5)

(b) Bestimme aus 1000 Simulationen mit $n = 1000$ einen Schätzwert für den Erwartungswert und die Varianz des Maximums $M_1 = \max_{0 \le t \le 1} X_t$. Werte dazu die Approximationen an den Stützstellen $t_k = k/m,\ k = 0, \ldots, m$ für $m = 1000$ aus. Vergleiche die Schätzwerte mit den theoretischen Größen. (3)

Aufgabe 2

Über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein Wiener-Prozess $\{X_t, t \ge 0\}$ gegeben. Für $t > 0$ (beliebig, aber fest) definieren wir

$$Z_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(X_{it/2^n} - X_{(i-1)t/2^n} \right)^2 - t\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\mathbb{E}\, Z_n = 0$ und $\mathbb{E}\, Z_n^2 = t^2 2^{-n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. (2)

(b) $\lim_{n \to \infty} Z_n = 0$ fast sicher. (2)

(c) Zeige mit Hilfe von Teilaussage (b), dass fast sicher

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} |X_{it/2^n} - X_{(i-1)t/2^n}| = \infty$$

(2)

Aufgabe 3

Sei $\{X_t,\, t \ge 0\}$ ein Wiener–Prozess. Zeige: Mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = 0\,.$$

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\{-X_t,\, t \ge 0\}$ ebenfalls ein Wiener-Prozess ist. (4)