Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück

WS 2009/10
10.12.2009

Übungen zu Stochastik II - Blatt 9

(Abgabe: Donnerstag, 17.12.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1
Es seien $\{X_t,\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess, $u \in \mathbb{R}$ beliebig (aber fest) und $Z = \{t \geq 0\ :\ X_t = u\}$. Zeige:

$$P(\nu(Z) = 0) = 1\ ,$$

wobei ν das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. (3)

Aufgabe 2
Es seien $\{X_t,\ t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess und $M_t = \max\limits_{s \in [0,t]} X_s$.
Zeige: Mit Wahrscheinlichkeit 1 wird M_t an genau einem Punkt in $[0, t]$ angenommen. (4)

Aufgabe 3
Seien $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor und K eine symmetrische und positiv definite $n \times n$-Matrix. Man nennt den absolutstetigen Zufallsvektor $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)^\top$ (regulär) n-dimensional normalverteilt mit Erwartungswertvektor μ und Kovarianzmatrix K (Schreibweise: $Z \sim N(\mu, K)$), falls die gemeinsame Dichte gegeben ist durch

$$f(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{detK}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-\mu)^\top K^{-1}(z-\mu)\right)\ \forall z \in \mathbb{R}^n\ .$$

Dann gilt $\mathbb{E}Z_i = \mu_i$ und $Cov(Z_i, Z_j) = k_{ij}\ \forall i, j = 1, \ldots, n$.
Die charakteristische Funktion von $Z \sim N(\mu, K)$ ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\exp(it^\top Z) = \exp(it^\top \mu - \frac{1}{2}t^\top Kt)\ \forall t \in \mathbb{R}^n$$

(a) Zeige: Für $Z \sim N(\mathbf{0}, K)$ und eine $m \times n$-Matrix A mit $rg(A) = m \leq n$ gilt $Y = AZ \sim N(\mathbf{0}, AKA^\top)$ (3)

(b) Es sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Betrachte die folgenden Transformationen des Wiener–Prozesses:

- *Brownsche Brücke* $\{B_t, t \in [0, 1]\}$ mit $B_t = X_t - tX_1$,
- *geometrische Brownsche Bewegung* $\{Y_t, t \geq 0\}$ mit $Y_t = e^{X_t}$,
- *Ornstein–Uhlenbeck–Prozess* $\{U_t, t \geq 0\}$ mit $U_t = e^{-t/2} X_{e^t}$.

Welche der Prozesse $\{B_t\}, \{Y_t\}$ bzw. $\{U_t\}$ sind Gauss-Prozesse? (4)

(c) Bestimme jeweils die zugehörige Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion für die Prozesse aus (b). (3)

Hinweis: Die charakteristische Funktion einer (eindimensional) $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable ist $\varphi(s) = e^{is\mu} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$.