Satz (Umkehrformel)

Sei Z eine ZV mit char. Fkt. φ_Z und Verteilungsfkt. F_Z.

Dann gilt für $\forall a, b$ mit $a<b$ und $P[Z=a]=P[Z=b]=0$:

$$F_Z(b)-F_Z(a)=\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{+c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_Z(t)\,dt.$$

Bem. $P(Z=a)=0 \iff F_Z$ ist stetig an der Stelle a.

Bem. $F_Z(b)-F_Z(a)=P[Z\le b]-P[Z\le a]\underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } b>a}}{=}P[Z\in(a,b]]\underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } P[Z=a]=0}}{=}P[Z\in(a,b)]$.

Beweis der Umkehrformel. Fresnel-Integral:

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c\frac{\sin(ax)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a),\text{ wobei } \operatorname{sgn}(a)=\begin{cases}+1, & a>0\\ 0, & a=0\\ -1, & a<0.\end{cases}$$

Seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ und $c>0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{+c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_Z(t)\,dt\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Def. von } \varphi_Z}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{+c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\,\mathbb{E}\,e^{itZ}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{+c}\mathbb{E}\,\frac{e^{it(Z-a)}-e^{it(Z-b)}}{it}\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz von}\\ \text{Fubini, Maßtheorie}}}{=}\frac{1}{2\pi}\mathbb{E}\int_{-c}^{+c}\frac{e^{it(Z-a)}-e^{it(Z-b)}}{it}\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ e^{ix}=\cos x+i\sin x\\ \text{(Euler-Formel)}}}{=}\frac{1}{2\pi}\mathbb{E}\int_{-c}^{+c}\left(\underbrace{\frac{\cos(t(Z-a))-\cos(t(Z-b))}{it}}_{\text{ungerade Fkt}}+\underbrace{\frac{\sin(t(Z-a))-\sin(t(Z-b))}{t}}_{\text{gerade Fkt.}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathbb{E}\int_0^c\frac{\sin t(Z-a)-\sin t(Z-b)}{t}\,dt.$$

Mit dem Fresnel-Integral folgt:

$$\lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it} \varphi_Z(t)\,dt = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{\pi} \mathbb{E} \int_0^c \frac{\sin(t(Z-a))-\sin(t(Z-b))}{t}\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vertauschung}\\ \text{von lim und } \mathbb{E}}}{=} \frac{1}{\pi} \mathbb{E} \lim_{c\to+\infty} \int_0^c \left(\frac{\sin(t(Z-a))}{t} - \frac{\sin(t(Z-b))}{t} \right) dt$$

muss mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz begründet werden

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Fresnel-}\\ \text{Integral}}}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{E}\left(\operatorname{sgn}(Z-a) - \operatorname{sgn}(Z-b) \right)$$

$$\underset{(*)}{=} \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} \cdot \mathbb{E}\left(\cancel{2}\, 1_{Z\in(a,b)} \right) = P[Z\in(a,b)] = F_Z(b) - F_Z(a).$$

$\boxed{(*)}$ 1) Sei $x<a \Rightarrow \operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b) = -1-(-1) = 0$

$x \quad a \quad b$

2) Sei $x\in(a,b) \Rightarrow \operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b) = +1-(-1) = 2$

$a \quad x \quad b$

3) Sei $x>b \Rightarrow \operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b) = +1-(+1) = 0$

$a \quad b \quad x$

4) Sei $x=a \Rightarrow \operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b) = 0-(-1) = +1$

5) Sei $x=b \Rightarrow \operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b) = 1-0 = +1$

} diese Fälle können ignoriert werden, denn $P[Z=a]=P[Z=b]=0$.

Es folgt, dass $\operatorname{sgn}(Z-a)-\operatorname{sgn}(Z-b) = 2\,1_{Z\in(a,b)}$ mit W-keit 1.

<u>Korollar.</u> Die charakteristische Fkt. bestimmt die Verteilungsfkt eindeutig. D.h.: Sind X und Y zwei ZV mit $\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)\ \forall t\in\mathbb{R}$, so gilt $F_X(t)=F_Y(t)\ \forall t\in\mathbb{R}$.

<u>Beweis</u> (Korollar) 1) Aus der Umkehrformel folgt:

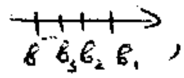
$\forall a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$, a und b Stetigkeitspunkte von F_X und F_Y, gilt:

$$F_X(b)-F_X(a) = F_Y(b)-F_Y(a).$$

2) F_X und F_Y sind monoton $\Rightarrow$ beide haben höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen). $\Rightarrow \forall n \; \exists a_n < -n$, Stetigkeitspunkt von F_X und F_Y : $\Rightarrow$

$$F_X(b) - F_X(a_n) = F_Y(b) - F_Y(a_n) \quad \forall b \in \mathbb{R} \text{ (Stetigkeitsstelle von } F_X, F_Y)$$

$$n \to \infty \Rightarrow a_n \to -\infty \quad \underset{\substack{\lim_{n\to\infty} F_X(a_n) = 0 \\ \lim_{n\to\infty} F_Y(a_n) = 0}}{\Rightarrow} \quad F_X(b) = F_Y(b) \quad \forall b \in \mathbb{R} \text{ (Stetigkeitsstelle von } F_X, F_Y)$$

3) Sei nun $b \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gibt eine Folge b_n mit $b_n \downarrow b$: 

, wobei b_n Stetigkeitsstellen von F_X und F_Y sind. Es folgt:

$$F_X(b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } F_X \text{ rechtsstetig}}}{=} \lim_{n\to\infty} F_X(b_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bewiesen in 2)}}}{=} \lim_{n\to\infty} F_Y(b_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } F_Y \text{ rechtsstetig}}}{=} F_Y(b)$$

Wir haben gezeigt, dass $F_X(b) = F_Y(b) \;\; \forall b \in \mathbb{R}$. $\square$

<u>Satz</u> (Char.-Fkt und Erwartungswerte)

Sei Z eine ZV.

1) Ist $\mathbb{E}|Z| < +\infty$, so gilt $\mathbb{E}Z = -i\varphi_Z'(0)$.

2) Ist $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$, so gilt $\mathbb{E}Z^2 = -\varphi_Z''(0)$.

3) Allgemein: Ist $\mathbb{E}(|Z|^k) < +\infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathbb{E}(Z^k) = \dfrac{\varphi_Z^{(k)}(0)}{i^k}$.

($\varphi_Z^{(k)}(0)$ ist die k-te Ableitung von φ_Z an der Stelle 0).

<u>Beweisidee.</u> Wir beweisen Teil 3, denn Teil 1 und 2 folgen mit $k = 1, 2$.

Def. der char. Fkt $\Rightarrow \varphi_Z(t) = \mathbb{E}\, e^{itZ}$.

$$\varphi_Z^{(k)}(t) = \left(\mathbb{E}\, e^{itZ}\right)^{(k)} \underset{\text{muss begründet werden!}}{=} \mathbb{E}\left[\left(e^{itZ}\right)^{(k)}\right] = \mathbb{E}\left[(iZ)^k e^{itZ}\right]$$

Der letzte Schritt folgt aus $\left(e^{at}\right)^{(k)} = a^k e^{at}$ ($a = \text{const}$).

Es folgt $\varphi_Z^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left[(iZ)^k \cdot 1\right] = i^k \mathbb{E}[Z^k]$. $\square$

<u>Bsp.</u> Sei $Z \sim N(0,1)$ (standardnormalverteilt).

$$\varphi_Z(t) = e^{-t^2/2} = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ t \to 0 \quad \left(\text{Taylor-Entwicklung von } e^x\right)$$

Es folgt: $\left(e^{-t^2/2}\right)'_{t=0} = 0$

$$\left(e^{-t^2/2}\right)''_{t=0} = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)''_{t=0} = \left(-1 + o(1)\right)_{t=0} = -1$$

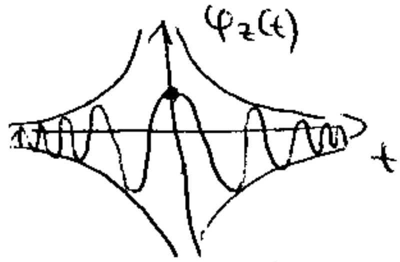
Also gilt: $\mathbb{E}Z = 0$ und $\mathbb{E}Z^2 = -(-1) = 1$ (beides ist bereits bekannt).

<u>Bsp.</u> Sei $Z \sim \mathcal{U}[-1,1]$ (gleichverteilt auf $[-1,1]$). Dichte: $f_Z(x) = \frac{1}{2} 1_{x \in [-1,1]}$

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}e^{itZ} = \int_{-1}^{1} e^{itx} f_Z(x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^{itx} \cdot \frac{1}{2} \cdot dx = \frac{1}{2it}\left(e^{it} - e^{-it}\right),\quad t \neq 0.$$

Für $t = 0$ gilt $\varphi_Z(0) = \mathbb{E}e^{i \cdot 0 \cdot Z} = \mathbb{E}1 = 1$.

Es folgt $\varphi_Z(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$.



$$\frac{\sin t}{t} = \frac{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} - \dots \quad (\text{Taylor-Entwicklung von } \sin t)$$

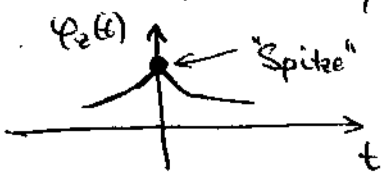
Es folgt: $\mathbb{E}Z = 0$, $\mathbb{E}Z^2 = -\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)''_{t=0} = \frac{1}{3}$.

Es folgt auch $\operatorname{Var} Z = 1/3$.

<u>Bsp.</u> Sei Z Cauchy-verteilt, $f_Z(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$. Dann hat Z keinen Erwartungswert, denn $\int_{\mathbb{R}} |t| f_Z(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|t|}{1+t^2}\,dt = \infty$.

Die char. Fkt. von Z ist gegeben durch $\varphi_Z(t) = e^{-|t|}$.

Da $\varphi_Z(t) = e^{-|t|} = 1 - |t| + o(t)$, $t \to 0$, ist φ_Z nicht diffbar an der Stelle 0:



Der Satz ist in diesem Bsp nicht anwendbar.