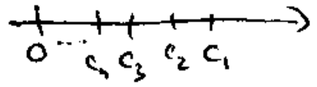
Konvergenz in Verteilung.

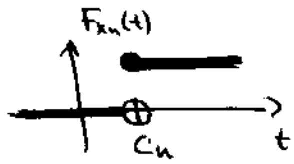
Def. Seien $X_1, X_2, \dots$ und X ZV. Wir sagen, dass $X_1, X_2, \dots$ gegen X in Verteilung konvergiert, falls $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$ für $\forall t \in \mathbb{R}$ so dass F_X stetig an der Stelle t ist. **Bez.**: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ ("d" steht für "distribution")

Bsp. (Zeigt, dass die Einschränkung auf Stetigkeitspunkte von F_X vernünftig ist).

Seien $c_1, c_2, c_3, \dots$ Zahlen mit $c_1 > c_2 > \dots > 0$, $c_n \downarrow 0$ $(n\to\infty)$.



Sei $X_n = c_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $X = 0$.



$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} 1_{[\cancel{-\infty},\, c_n, \infty)}(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 0, & t=0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$

Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geq 0 \end{cases}$ für alle $t \neq 0$.

Hätte man verlangt, dass $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten soll, denn würde X_n in diesem Bsp. nicht gegen 0 konvergieren.

Der nächste Satz zeigt, dass Konvergenz in Verteilung die schwächste der vier bekannten Konvergenzarten ist.

Satz. Seien $X_1, X_2, \dots$ und X ZV mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ (Konvergenz in W-keit). Dann gilt $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Bem.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} L^2\text{-} \\ \text{Konvergenz} \end{array}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} P \\ \text{Konvergenz} \\ \text{in W-keit} \end{array}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} d \\ \text{Konvergenz in} \\ \text{Verteilung} \end{array}} \\
& \boxed{\begin{array}{c} \text{fast} \\ \text{sichere} \\ \text{Konvergenz} \end{array}} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis des Satzes.</u> $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Rightarrow \forall \varepsilon>0: \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n - X|>\varepsilon] = 0$.

① Wir zeigen zuerst, dass $\limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(t) \le F_X(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$.

$$F_{X_n}(t) \underset{\text{def}}{=} \mathbb{P}[X_n\le t] = \mathbb{P}[X_n\le t, |X_n - X|\le\varepsilon] + \mathbb{P}[X_n \le t, |X_n-X|>\varepsilon]$$

$$\underset{(*)}{\le} \mathbb{P}[X\le t+\varepsilon] + \mathbb{P}[X_n\le t, |X_n-X|>\varepsilon]$$

$$\le \mathbb{P}[X\le t+\varepsilon] + \mathbb{P}[|X_n-X|>\varepsilon]$$

$$= F_X(t+\varepsilon) + \mathbb{P}[|X_n-X|>\varepsilon].$$

(∗): Ist $X_n\le t$ und $|X_n-X|\le\varepsilon$, so gilt auch $X = X_n + X - X_n \le t+\varepsilon$. Wir haben somit "$X_n\le t, |X_n-X|\le\varepsilon$" $\subset$ "$X\le t+\varepsilon$"

$n\to\infty \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(t) \le F_X(t+\varepsilon) + 0 = F_X(t+\varepsilon) \quad \forall\varepsilon>0$.

$\varepsilon\downarrow 0 \Rightarrow$ (da F_X rechtsstetig) $\limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(t) \le F_X(t)$.

② Wir zeigen, dass $\liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(t) \ge F_X(t)$. $\forall$ Stetigkeitspunkt t von F_X.

$$F_X(t-\varepsilon) = \mathbb{P}[X\le t-\varepsilon] = \mathbb{P}[X\le t-\varepsilon, |X_n-X|\le\varepsilon] + \mathbb{P}[X\le t-\varepsilon, |X_n-X|>\varepsilon]$$

$$\underset{(*)}{\le} \mathbb{P}[X_n\le t] + \mathbb{P}[X\le t-\varepsilon, |X_n-X|>\varepsilon]$$

$$\le \mathbb{P}[X_n\le t] + \mathbb{P}[|X_n-X|>\varepsilon]$$

$$= F_{X_n}(t) + \mathbb{P}[|X_n-X|>\varepsilon].$$

(∗): Aus $X\le t-\varepsilon$ und $|X_n-X|\le\varepsilon$ folgt, dass $X_n = X_n - X + X \le \varepsilon + t - \varepsilon = t$. Es gilt somit "$X\le t-\varepsilon, |X_n-X|\le\varepsilon$" $\subset$ "$X_n\le t$"

$n\to\infty \Rightarrow F_X(t-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(t)$.

$\varepsilon\downarrow 0 \Rightarrow$ (falls t ein Stetigkeitspunkt von F_X ist) $F_X(t) \le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(t)$.

③ Aus ① und ② folgt: $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ für jeden Stetigkeitspunkt t von F_X.

$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$. □

<u>Bsp.</u> Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Sei $X\sim N(0,1)$ (standardnormalverteilt) und sei $X_1 = X_2 = \ldots = -X$. Es gilt $F_{X_n} = F_X \ \forall n\in\mathbb{N}$, denn die Standard-Normalverteilung ist symmetrisch bzgl. 0. $\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Aber $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\not\to}} X$, denn $\mathbb{P}[|X_n - X| > 1] = \mathbb{P}[|2X| > 1] = \mathbb{P}[|X| > \frac{1}{2}]$

$$= 2\mathbb{P}[X < -\tfrac{1}{2}] = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1/2} e^{-u^2/2}\,du = \text{const} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$

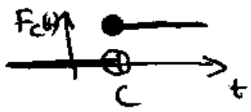
Somit gilt $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, aber nicht $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.

Es gibt aber einen Spezialfall, wo die Umkehrung gilt.

<u>Satz.</u> Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von ZV mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Dann gilt $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$.

<u>Beweis.</u> $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c \Rightarrow F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1, & t > c \\ 0, & t < c \end{cases} \quad \forall t \neq c,$

denn $F_c(t) = \mathbb{P}[c \le t] = \begin{cases} 1, & t \ge c \\ 0, & t < c \end{cases}$



Der einzige Unstetigkeitspunkt von F_c ist c.

Es folgt: $$\mathbb{P}[|X_n - c| > \varepsilon] = \mathbb{P}[X_n < c - \varepsilon] + \mathbb{P}[X_n > c + \varepsilon]$$
$$\le \mathbb{P}[X_n \le c - \varepsilon] + \mathbb{P}[X_n > c + \varepsilon]$$
$$= \underbrace{F_{X_n}(c - \varepsilon)}_{\downarrow n\to\infty \;\; 0} + \big(\underbrace{1 - F_{X_n}(c + \varepsilon)}_{\downarrow n\to\infty \;\; 1-1=0}\big)$$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n - c| > \varepsilon] = 0 + 1 - 1 = 0.$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c.$$