Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko — WS 2010
W. Karcher — 9. April 2010

Zweite Klausur zu Elementare WR und Statistik

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Man wirft einen fairen Würfel dreimal.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme ≥ 16?

b) Gegeben, dass die Augensumme ≥ 16 ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Wurf eine 6 ist?

c) Gegeben, dass der erste Wurf eine 6 ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme ≥ 16 ist?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) 16 schwarze und 16 weiße Schachfiguren liegen in einem Kasten. Es werden 3 Figuren gezogen (ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Figuren die gleiche Farbe haben?

b) Man wirft einen fairen Würfel bis eine 6 kommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mehr als 5 Mal würfeln muss?

c) Bei einem Kartenspiel werden 32 Karten, darunter 4 Asse, an 3 Spieler verteilt. Jeder Spieler bekommt 10 Karten, 2 bleiben als Skat auf dem Tisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler in 3 Spielen kein einziges Ass bekommt?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

20% der Bevölkerung sind Akademiker. Der Anteil von Rauchern beträgt 30% bei der Gesamtbevölkerung und 20% bei den Akademikern.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Raucher ein Akademiker ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Nichtakademiker raucht?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es unter 100 Personen mindestens eine gibt, die am 10. März Geburtstag hat? Geben Sie die exakte Wahrscheinlichkeit und die Poisson-Approximation an. Ein Jahr hat 365 Tage. Alle Geburtstermine können als gleichwahrscheinlich angenommen werden.

b) Die Zufallsvariable X sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung, dass $\mathbb{P}[X \geq 2\lambda] \leq \frac{1}{\lambda}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

a) Es seien A und B unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] = 0.4$ und $\mathbb{P}[A \cup B] = 0.7$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[B]$.

b) Es seien A und B unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}[A \setminus B] = 0.3$ und $\mathbb{P}[A] = 0.4$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[A \cup B]$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ und $\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} Y = 1$. Bestimmen Sie

a) $\operatorname{Var}(X + 2Y - 1)$.

b) $\operatorname{Cov}(X + 2Y, 2X - Y)$.

c) $\operatorname{Var}(X + XY)$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Man wirft unendlich oft eine faire Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass "Kopf" zum ersten Mal bei einem geradzahligen Wurf auftritt?

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Zeigen Sie, dass $X/(X + Y)$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ ist.
Hinweis: Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $X/(X+Y)$ mit Hilfe der Dichte von (X, Y).