Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Wolfgang Karcher

WS 2009/10
21.01.2010

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 12 (Probeklausur)

Abgabe: 28.01.2010 vor den Übungen.

Bitte höchstens 5 Aufgaben deiner Wahl abgeben. Diese Aufgaben werden bepunktet. Die Lösung wird am 28.01.2010 in den Übungen vorgestellt. Die Anzahl der Aufgaben übersteigt den Umfang einer Klausur.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit drei Kindern mindestens eines der Kinder ein Mädchen ist? Vereinfachend wird hierbei angenommen, dass Mädchen unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 geboren werden.

(b) In einer Familie mit drei Kindern gibt es mindestens ein Mädchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer solchen Familie alle drei Kinder Mädchen sind?

(c) Vor dem Anfang des Semesters werden die zwei (verschiedenen) Wochentage, an denen eine Vorlesung stattfindet, zufällig aus 5 möglichen Tagen (Montag bis Freitag) ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es keine Vorlesung am Freitag gibt?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein dreiköpfiger Ausschuss trifft Entscheidungen mit einfacher Mehrheit. Der Vorsitzende trifft eine richtige Entscheidung mit Wahrscheinlichkeit 0.6, das zweite Mitglied mit Wahrscheinlichkeit 0.9, und das dritte Mitglied wirft eine faire Münze und trifft somit eine richtige Entscheidung mit Wahrscheinlichkeit 0.5. Die Entscheidungen der verschiedenen Mitglieder sind (was ihre Richtigkeit angeht) voneinander unabhängig.

(a) Wird sich die Arbeit des Ausschusses verbessern, wenn das dritte Mitglied sich immer der Meinung des Vorsitzenden anschließen würde, anstatt Münze zu werfen?

(b) Der Ausschuss hat eine falsche Entscheidung getroffen (das dritte Mitglied warf Münze). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Vorsitzende für eine falsche Entscheidung gestimmt hat?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zwei Personen werfen einen fairen Würfel jeweils bis zur ersten 6. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dafür die gleiche Anzahl an Würfen brauchen.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Beim Einscannen eines Buches für die Google-Buchsuche wird eine Seite mit Wahrscheinlichkeit $1/1000$ falsch eingescannt. Berechne approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Buch mit 2000 Seiten mindestens zwei Seiten falsch eingescannt werden.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

a) Seien $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_i) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.
b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ und $Y_1, Y_2, \ldots$ zwei Folgen von Zufallsvariablen mit $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{f.s.}{\to}} X$ und $Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{f.s.}{\to}} Y$. Zeige, dass $X_n + Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{f.s.}{\to}} X + Y$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf $[0,1]$. Berechne die Dichte und den Erwartungswert von $Z := 1/\sqrt{X}$. Zeige, dass $\mathbb{E}(Z^2) = +\infty$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Der Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.

(a) Berechne die Dichte und die Verteilungsfunktion von X.

(b) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Seien X_1, X_2, X_3, X_4 unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = +1) = p$ und $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$, $i = 1, \ldots, 4$, wobei $p \in [0,1]$. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und gleichverteilt auf $[-1, 1]$.

(a) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von $(X_1 + \ldots + X_n)/n$.

(b) Zeige mit Hilfe der Tschebischeff-Ungleichung, dass $(X_1 + \ldots + X_n)/n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0$.

(c) Gib eine Approximation für die Wahrscheinlichkeit, dass $X_1 + \ldots + X_{100} > 10$.

Hinweis: $\Phi(1.07) = 0.85$, $\Phi(1.22) = 0.88$, $\Phi(1.51) = 0.93$.

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien Cauchy-verteilt und unabhängig. Zeige, dass auch $(X_1 + \ldots + X_n)/n$ Cauchy-verteilt ist.

Hinweis: Benutze (ohne Beweis), dass die charakteristische Funktion von X_1 durch $\varphi_{X_1}(t) = e^{-|t|}$ gegeben ist.