



Zufällige Tessellationen II: komplexere Modelle

Seminar: Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen

Benjamin Lang

Universität Ulm

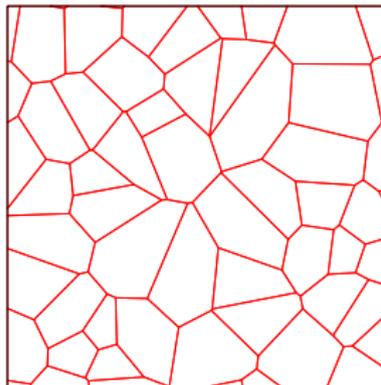
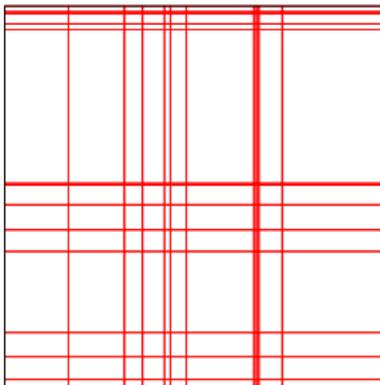
15. Januar 2010



Warum braucht man komplexere Modelle?

Ziel:

- angemessenes Modell zur Beschreibung von Telekommunikationsnetzwerken
- hierfür: Netzwirkabel modellieren → via Straßensystem





Warum braucht man komplexere Modelle?

Problem:

- Realität oft komplex: „Löcher“, Verästelungen durch Nebenstraßen
- Basis-Tessellationen reichen nicht aus



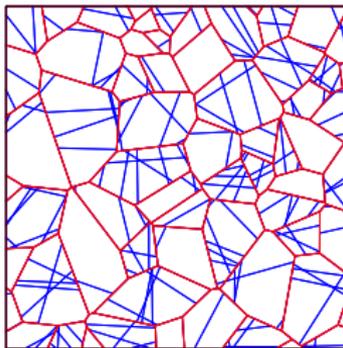
Abbildung: Straßenkarte von Paris



Warum braucht man komplexere Modelle?

Idee:

- auf bestehenden Tessellationen weitere Operationen durchführen: z. B.
- einzelne Zellen individuell weiter unterteilen
- Kanten einer anderen Tessellation über die der gegebenen legen





Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Tessellation

Vorabdefinitionen

- Sei \mathcal{F} die Familie aller (nichtleeren) abgeschlossenen Mengen (im \mathbb{R}^2) und \mathcal{P} als Unterklasse von \mathcal{F} die Familie aller 2-dimensionalen kompakten und konvexen Polytope
- Bzgl. \mathcal{F} definiere $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ als die kleinste σ -Algebra von \mathcal{F} , die die Mengen der Form $\{F \in \mathcal{F}, F \cap C \neq \emptyset\}$, mit beliebigem kompakten C , enthalten
- Dann kann \mathcal{P} mit der Spur- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{P}$ ausgestattet werden



Tessellation

Definition (Tessellation)

Eine Folge $\tau = \{P_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}$ mit $\text{int } P_n \neq \emptyset$ heißt *Tessellation*, falls

- (i) $\text{int } P_n \cap \text{int } P_m = \emptyset$ für alle $n \neq m$
- (ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \mathbb{R}^2$
- (iii) für alle kompakten Mengen $C \subset \mathbb{R}^2$ gilt:
 $\{P \in \tau : P \cap C \neq \emptyset\}$ ist endlich.

Die P_n heißen *Zellen* der Tessellation τ .

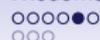


Zufällige Tessellation

Definition (zufällige Tessellation)

Sei \mathcal{T} die Familie aller Tessellationen (im \mathbb{R}^2). Eine Folge $\tau = \{\Xi_n\}_{n \geq 1}$ von zufälligen Polytopen heißt *zufällige Tessellation*, falls

$$\mathbb{P} \left(\{\Xi_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{T} \right) = 1.$$



Tessellation als markierter Punktprozess

Lokation – assoziierter Punkt

Sei $c: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine messbare Abbildung mit

$$c(P + x) = c(P) + x$$

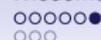
für alle $P \in \mathcal{P}$ und $x \in \mathbb{R}^2$. Dann heißt $c(P)$ der zu P *assoziierte Punkt*.

Markierung

Die Marke eines zu einem Polytop $P \in \mathcal{P}$ assoziierten Punktes $c(P)$ ist gegeben durch

$$P - c(P) \in \mathcal{P}_o := \{P \in \mathcal{P} : c(P) = o\},$$

wobei \mathcal{P}_o der Markenraum ist.



Tessellation als markierter Punktprozess

Tessellation als markierter Punktprozess

Dann können wir eine zufällige Tessellation $\{\Xi_n\}_{n \geq 1}$ als markierten Punktprozess

$$X = \{(c(\Xi_n), \Xi_n - c(\Xi_n))\}_{n \geq 1}$$

schreiben.

Oft:

- nicht nur interessiert an Zellen („Häuserblöcke“)
- sondern auch an den Straßenkreuzungen (Ecken) oder Straßen selbst (Kanten)
- Frage: wie kommen wir an die ran?



Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Facetten

Definition (k -Facetten)

Die k -Facetten eines Polytops $P \subset \mathbb{R}^2$ für $k = 0, 1, 2$ sind definiert durch:

- (i) die 0-Facetten sind die Ecken
- (ii) die 1-Facetten sind die Kanten
- (iii) die 2-Facette ist das Polytop selbst

- X induziert (markierte) Punktprozesse von niedrig-dimensionalen Polytopen (als Marken), nämlich den k -Facetten



Facetten-Prozess

Definition (Facetten-Prozess)

Sei X eine zufällige Tessellation. Es heißt $X^{(k)}$ der k -Facetten-Prozess von X – dieser liefert die k -Facetten von X als Punkte:

$$X^{(0)} = \{e_n\}_{n \geq 1}, \quad e_n \text{ ist Ecke einer Zelle von } X$$

$$X^{(1)} = \{k_n\}_{n \geq 1}, \quad k_n \text{ ist Kante einer Zelle von } X$$

$$X^{(2)} = \{\Xi_n\}_{n \geq 1} = X, \quad \Xi_n \text{ ist Zelle von } X$$

Analog

Der k -Facetten-Prozess kann als markierter Punktprozess aufgefasst werden



Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

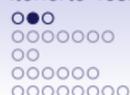
Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Modell

Idee war: auf bestehenden Tessellationen gewisse Operationen durchführen

Definition (Iterierte Tessellation)

Sei $X_0 = \{\Xi_n\}_{n \geq 1}$ eine zufällige Tessellation und sei $\{X_n\}_{n \geq 1}$ mit $X_n = \{\Xi_{n,\nu}\}_{\nu \geq 1}$ eine Folge von zufälligen Tessellationen. Dann heißt

$$X = \{\Xi_n \cap \Xi_{n,\nu} : \text{int } \Xi_n \cap \text{int } \Xi_{n,\nu} \neq \emptyset\}_{(n \geq 1, \nu \geq 1)}$$

iterierte (zufällige) Tessellation (IZT) mit Initial-Tessellation X_0 und Komponenten-Tessellation X_n .



Modell

Interpretation:

- Jede Zelle von X_0 wird weiter unterteilt:
- Die i -te Zelle von X_0 wird von der i -ten Tessellation X_i unterteilt,
- d. h. die i -te Zelle von X_0 wird mit allen Zellen von X_i geschnitten (sofern Schnitt nichtleer)



Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Beispiele – Superposition

Superposition

Eine IZT X mit $X_1 = X_2 = \dots$, d. h.

$$X_0 = \{\Xi_n\}_{n \geq 1},$$

$$X_1 = X_n = \{\Xi_{1,\nu}\}_{\nu \geq 1} =: \{\tilde{\Xi}_\nu\}_{\nu \geq 1},$$

$$X = \left\{ \Xi_n \cap \tilde{\Xi}_\nu : \text{int } \Xi_n \cap \text{int } \tilde{\Xi}_\nu \neq \emptyset \right\}_{(n \geq 1, \nu \geq 1)}$$

heißt X_0/X_1 - *Superposition*.

Notation: $\sum (X_0, X_1) := X$.



Beispiele – Superposition

Anschaulich:

- Gegeben: Tessellation X_0
- Lege Kanten von X_1 über die Kanten von X_0

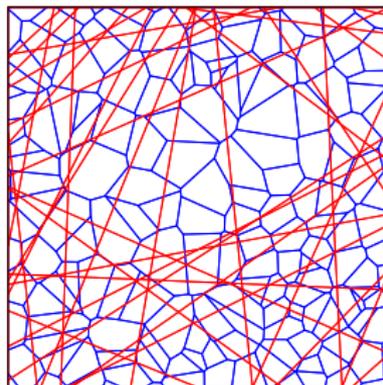


Abbildung: PLT/PVT - Superposition (PLT in rot)



Beispiele – Nesting

Nesting

Eine IZT X heißt X_0/X_1 -*Nesting*, falls $\mathcal{X} := \{X_n\}_{n \geq 1}$ i.i.d. und $\{X_n\}$, X_0 unabhängig.

Notation: $I(X_0, \mathcal{X}) := X$.

Anschaulich:

- Jede Zelle von X_0 wird weiter unterteilt
- Unterteilung der Zellen findet mit unabhängigen Kopien von X_1 statt



Beispiele – Nesting

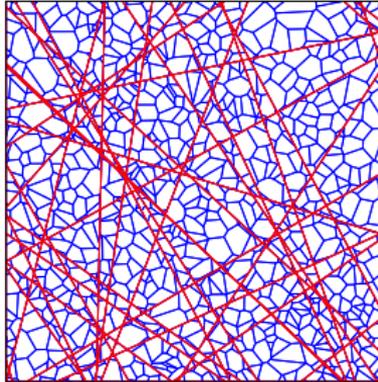
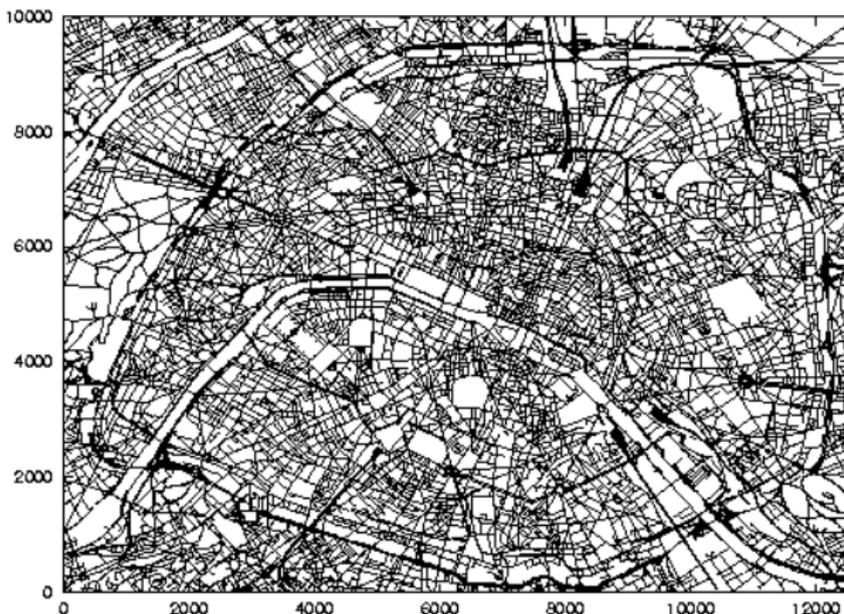


Abbildung: PLT/PVT - Nesting (PLT in rot)



Beispiele – Nesting mit Bernoulli Thinning

Problem: reale Daten haben oft „Löcher“





Beispiele – Nesting mit Bernoulli Thinning

Idee:

- Unterteile nur manche Zellen der Initial-Tessellation X_0
- die anderen Zellen unverändert lassen

Bernoulli Thinning: X_0/pX_1 - Nesting

- Eine Zelle von X_0 wird mit Wkt. p weiter unterteilt

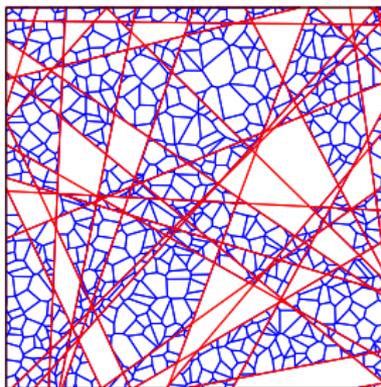


Abbildung: PLT/PVT - Nesting mit Bernoulli Thinning ($p = 0,75$)



Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

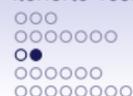
Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Stationarität einer IZT

Theorem

Sei X eine IZT mit Initial-Tessellation X_0 und Komponenten-Tessellation X_n . Sei nun die Folge X_0, X_1, \dots i.i.d. und stationär (isotrop). Dann ist X stationär (isotrop).

Annahme

Wir setzen ab sofort stets voraus, dass X_0, X_1, \dots isotrop und stationär.



Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Intensitäten der Facetten-Prozesse

Bezeichnungen

- $\lambda_0^{(0)}$ erwartete Anzahl der Ecken von X_0 pro Einheitsfläche
- $\lambda_0^{(1)}$ erwartete Anzahl der Kanten von X_0 pro Einheitsfläche
- $\lambda_0^{(2)}$ erwartete Anzahl der Zellen von X_0 pro Einheitsfläche
- $\lambda_0^{(3)}$ erwartete Gesamtkantenlänge von X_0 pro Einheitsfläche

Bezeichnungen analog für X_1 : $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_1^{(3)}$.



Intensitäten

Ziel:

- Intensitäten der Facetten-Prozesse einer IZT X
- in Abhängigkeit der Intensitäten der Facetten-Prozesse von X_0 und X_1



Intensitäten bei Superposition

Theorem

Sei X eine X_0/X_1 - Superposition im \mathbb{R}^2 . Dann gilt:

$$\lambda^{(0)} = \lambda_0^{(0)} + \lambda_1^{(0)} + \frac{2}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda_0^{(1)} + \lambda_1^{(1)} + \frac{4}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda_0^{(2)} + \lambda_1^{(2)} + \frac{2}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(3)} = \lambda_0^{(3)} + \lambda_1^{(3)}$$



Intensitäten bei Nesting

Theorem

Sei X ein X_0/X_1 -Nesting im \mathbb{R}^2 . Dann gilt:

$$\lambda^{(0)} = \lambda_0^{(0)} + \lambda_1^{(0)} + \frac{4}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda_0^{(1)} + \lambda_1^{(1)} + \frac{6}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda_0^{(2)} + \lambda_1^{(2)} + \frac{2}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(3)} = \lambda_0^{(3)} + \lambda_1^{(3)}$$



Intensitäten bei Nesting mit BT

Theorem

Sei X ein X_0/pX_1 - Nesting im \mathbb{R}^2 . Dann gilt:

$$\lambda^{(0)} = \lambda_0^{(0)} + p\lambda_1^{(0)} + \frac{4p}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda_0^{(1)} + p\lambda_1^{(1)} + \frac{6p}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda_0^{(2)} + p\lambda_1^{(2)} + \frac{2p}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(3)} = \lambda_0^{(3)} + p\lambda_1^{(3)}$$



Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Intensitäten – konkreter

PLT	$\frac{1}{\pi} \gamma^2$	$\frac{2}{\pi} \gamma^2$	$\frac{1}{\pi} \gamma^2$	γ
PVT	2γ	3γ	γ	$2\sqrt{\gamma}$
PDT	γ	3γ	2γ	$\frac{32}{3\pi} \sqrt{\gamma}$

Abbildung: $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ in Abhängigkeit von γ



Intensitäten – konkreter

PLT/PLT	PLT/PVT	PLT/PDT
$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + \frac{1}{\pi} p\gamma_1^2 + \frac{4}{\pi} p\gamma_0\gamma_1$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + 2p\gamma_1 + \frac{8}{\pi} p\gamma_0\sqrt{\gamma_1}$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + p\gamma_1 + \frac{128}{3\pi^2} p\gamma_0\sqrt{\gamma_1}$
$\frac{2}{\pi} \gamma_0^2 + \frac{2}{\pi} p\gamma_1^2 + \frac{6}{\pi} p\gamma_0\gamma_1$	$\frac{2}{\pi} \gamma_0^2 + 3p\gamma_1 + \frac{12}{\pi} p\gamma_0\sqrt{\gamma_1}$	$\frac{2}{\pi} \gamma_0^2 + 3p\gamma_1 + \frac{64}{3\pi^2} p\gamma_0\sqrt{\gamma_1}$
$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + \frac{1}{\pi} p\gamma_1^2 + \frac{2}{\pi} p\gamma_0\gamma_1$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + p\gamma_1 + \frac{4}{\pi} p\gamma_0\sqrt{\gamma_1}$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + 2p\gamma_1 + \frac{64}{3\pi^2} p\gamma_0\sqrt{\gamma_1}$
$\gamma_0 + p\gamma_1$	$\gamma_0 + 2p\sqrt{\gamma_1}$	$\gamma_0 + \frac{32}{3\pi} p\sqrt{\gamma_1}$
PVT/PLT	PVT/PVT	PVT/PDT
$\frac{1}{\pi} p\gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \frac{8}{\pi} p\gamma_1\sqrt{\gamma_0}$	$2(\gamma_0 + p\gamma_1) + \frac{16}{\pi} p\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$	$2\gamma_0 + p\gamma_1 + \frac{256}{3\pi^2} p\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$
$\frac{2}{\pi} p\gamma_1^2 + 3\gamma_0 + \frac{12}{\pi} p\gamma_1\sqrt{\gamma_0}$	$3(\gamma_0 + p\gamma_1) + \frac{24}{\pi} p\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$	$3(\gamma_0 + p\gamma_1) + \frac{128}{3\pi^2} p\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$
$\frac{1}{\pi} p\gamma_1^2 + \gamma_0 + \frac{4}{\pi} p\gamma_1\sqrt{\gamma_0}$	$\gamma_0 + p\gamma_1 + \frac{8}{\pi} p\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$	$\gamma_0 + 2p\gamma_1 + \frac{128}{3\pi^2} p\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$
$p\gamma_1 + 2\sqrt{\gamma_0}$	$2(\sqrt{\gamma_0} + p\sqrt{\gamma_1})$	$2\sqrt{\gamma_0} + \frac{32}{3\pi} p\sqrt{\gamma_1}$
PDT/PLT	PDT/PVT	PDT/PDT
$\frac{1}{\pi} p\gamma_1^2 + \gamma_0 + \frac{128}{3\pi^2} p\gamma_1\sqrt{\gamma_0}$	$2p\gamma_1 + \gamma_0 + \frac{256}{3\pi^2} p\sqrt{\gamma_1\gamma_0}$	$\gamma_0 + p\gamma_1 + \frac{4096}{9\pi^3} p\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$
$\frac{2}{\pi} p\gamma_1^2 + 3\gamma_0 + \frac{64}{3\pi^2} p\gamma_1\sqrt{\gamma_0}$	$3(p\gamma_1 + \gamma_0) + \frac{128}{\pi^2} p\sqrt{\gamma_1\gamma_0}$	$3(\gamma_0 + p\gamma_1) + \frac{2048}{3\pi^3} p\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$
$\frac{1}{\pi} p\gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \frac{64}{3\pi^2} p\gamma_1\sqrt{\gamma_0}$	$p\gamma_1 + 2\gamma_0 + \frac{128}{3\pi^2} p\sqrt{\gamma_1\gamma_0}$	$2(\gamma_0 + p\gamma_1) + \frac{2048}{9\pi^3} p\sqrt{\gamma_1\gamma_0}$
$p\gamma_1 + \frac{32}{3\pi} \sqrt{\gamma_0}$	$2p\sqrt{\gamma_1} + \frac{32}{3\pi} \sqrt{\gamma_0}$	$\frac{32}{3\pi} (\sqrt{\gamma_0} + p\sqrt{\gamma_1})$

Abbildung: Intensitäten in Abhängigkeit von γ_0 und γ_1 bei Nesting



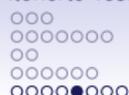
Was fangen wir mit diesen Intensitäten an?

Ziel:

- optimales Modell, d. h. Modell, das Realität bestmöglichst wiedergibt

Idee:

- Passe (theoretisches) Modell an die Realität an
- (theoretisches) Modell wird durch $\lambda = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})^T$ beschrieben



Anpassung des Modells an die Realität

1. Schritt:

- Betrachte aus Realität Ausschnitts-Fenster W
- Schätze λ aus diesen Daten: Schätzer

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{|W|} (n_v, n_e, n_c, l_e)^T$$

wobei

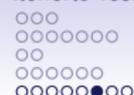
n_v = Anzahl der Ecken in W

n_e = Anzahl der Kanten W

n_c = Anzahl Zellen in W

l_e = Gesamtlänge der Kanten in W

$|W|$ = Fläche von W



Anpassung des Modells an die Realität

Was heißt „anpassen“?

- Vorgabe eines Satzes von Tessellations-Modellen
- Vergleiche theoretisches Modell mit realem Straßensystem: via sog. Abstandsfunktion

2. Schritt

- Für jedes Modell bestimme Abstand zw. λ^{Modell} und $\hat{\lambda}$:

$$d_{\text{Modell}}(\gamma) := \left(\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\hat{\lambda}^{(i)} - \lambda_{\text{Modell}}^{(i)}}{\hat{\lambda}^{(i)}} \right)^2 \right)^{1/2},$$



Anpassung des Modells an die Realität

3. Schritt

- bestimme für jedes Modell $\gamma_{\text{Modell}}^* = \arg \min d_{\text{Modell}}(\gamma)$
- Optimales Modell: unter allen Modellen das, bei dem $d_{\text{Modell}}(\gamma_{\text{Modell}}^*)$ am kleinsten



Optimales Modell – Beispiel

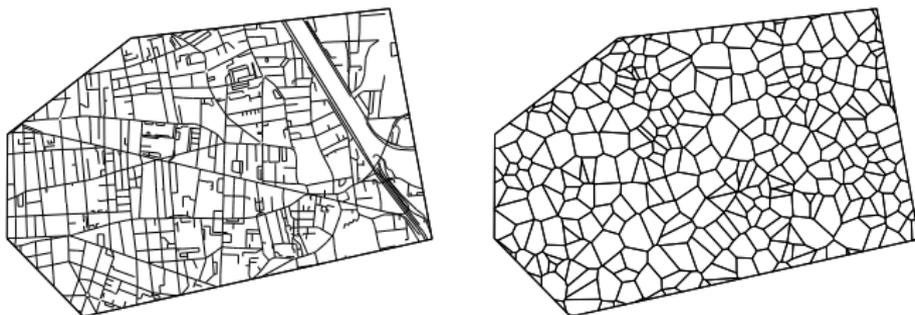


Abbildung: Optimales Modell aus Basis-Tessellationen

links reales Straßensystem: 528 Kreuzungen, 324 Häuserblöcken, 849 Straßenstücken, 97 km Gesamtstraßenlänge

rechts optimales Modell PVT mit $\gamma = 81$ (pro km^2): in Erwartung 585 Kreuzungen, 293 Häuserblöcken, 878 Straßenstücken, 82 km Gesamtstraßenlänge



Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Grenzwerte von Folgen von iterierten Tessellationen – Motivation

Fragestellung:

- iterierte Tessellation als neue Initial-Tessellation für weitere Iteration verwenden
- Existiert ein Grenzwert bei einer solchen fortlaufenden wiederholten Anwendung?



Grundlegendes

Konvergenz

Sei X, X_1, X_2, \dots eine Folge von stationären Tessellationen im \mathbb{R}^2 .

- Die Folge von Tessellationen konvergiert in Verteilung (bzw. schwach) gegen X (i. Z. $X_n \Rightarrow X$), falls

$$T_{X_n}(C) \rightarrow T_X(C) \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \forall \text{ kompakten } C$$

- wobei $T_X(C) := \mathbb{P}(X^1 \cap C \neq \emptyset)$ mit C kompakt und X^1 die Kantenmenge von X



Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Superposition – Grundlegendes

Intensität bei Superposition von n Tessellationen

Seien X_0, X_1, \dots, X_{n-1} i.i.d. und stationäre Tessellationen im \mathbb{R}^2 mit Gesamtkantenlängen-Intensität $\lambda^{(3)}$.

\Rightarrow Die Superposition $\sum (X_0, \dots, X_{n-1})$ ist stationäre Tessellation mit Parameter $n \cdot \lambda^{(3)}$.

Definition (Normierte Superposition)

Es heißt $\sum (nX_0, \dots, nX_{n-1})$, $n \geq 2$, *normierte Superposition*.



Konvergenz bei Superposition

Theorem

Sei X_0, X_1, \dots eine Folge von i.i.d. und stationären Tessellationen im \mathbb{R}^2 mit $0 < \lambda^{(1)}, \lambda^{(3)} < \infty$. Dann gilt

$$\sum (nX_0, \dots, nX_{n-1}) \Rightarrow \tilde{X} \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei \tilde{X} eine stationäre PLT (mit entspr. Parameter $\lambda^{(3)}$) ist.



Gliederung

Motivation

Wiederholung

Zufällige Tessellation

Facetten

Iterierte Tessellationen

Modell

Beispiele

Stationarität

Intensitäten einer IZT

Anwendung: kurzer Ausblick

Grenzwerte

Grundlegendes

Superposition

Nesting



Nesting – Grundlegendes

Analoges Vorgehen:

Definition (Normiertes Nesting)

Sei X_0 eine stationäre Tessellation und $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$ eine Folge von Folgen von Tessellationen, so dass alle Tessellationen einschl. X_0 i.i.d. sind. Dann ist die Folge $I_2(X_0), I_3(X_0), \dots$ von *normierten Nestings* rekursiv definiert durch

$$I_2(X_0) = I(2X_0, 2\mathcal{X}_1),$$

$$I_n(X_0) = I(nX_0, n\mathcal{X}_1, \dots, n\mathcal{X}_{n-1})$$

$$= I(I(nX_0, n\mathcal{X}_1, \dots, n\mathcal{X}_{n-2}), n\mathcal{X}_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots$$



Konvergenz bei Nesting

Hier:

- Man weiß nicht, ob eine Grenz-Tessellation existiert
- Aber man weiß folgendes:

Theorem

Seien X_0, X stationäre Tessellationen und $\{I_n(X_0)\}_{n \geq 2}$ die Folge von normierten Nestings.

Wenn $I_n(X_0) \Rightarrow X$ für $n \rightarrow \infty$, dann ist X stabil bzgl. Nesting.

Dabei heißt X stabil bzgl. Nesting, falls

$$X \sim I_n(X) \quad \text{für alle } n = 2, 3, \dots$$

d. h. die Verteilung von X ändert sich bei fortlaufendem Nesting (mit Folgen von Tessellationen derselben Verteilung) nicht.



Literatur

-  Roland Maier, Volker Schmidt: *Stationary Iterated Tessellations*, Adv. Appl. Prob. (SGSA) 35, 337–353 (2003)
-  Werner Nagel, Viola Weiss: *Limits of Sequences of Stationary Planar Tessellations*, Adv. Appl. Prob. (SGSA) 35, 123–138 (2003)
-  Frank Fleischer: *Analysis and Fitting of Random Tessellation Models, Applications in Telecommunication and Cell Biology*, Dissertation, 2007



Literatur

-  C. Gloaguen, F. Fleischer, H. Schmidt, V. Schmidt: *Fitting of Stochastic Telecommunication Network Models via Distance Measures and Monte-Carlo Tests*, Telecommunication Systems 31 (2006), 353-377
-  C. Gloaguen, F. Voss, V. Schmidt: *Parametric Distance Distributions for Fixed Access Network Analysis and Planning*, Proceedings of the 21st International Teletraffic Congress, Paris 2009