Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen

Thema: Faserprozesse

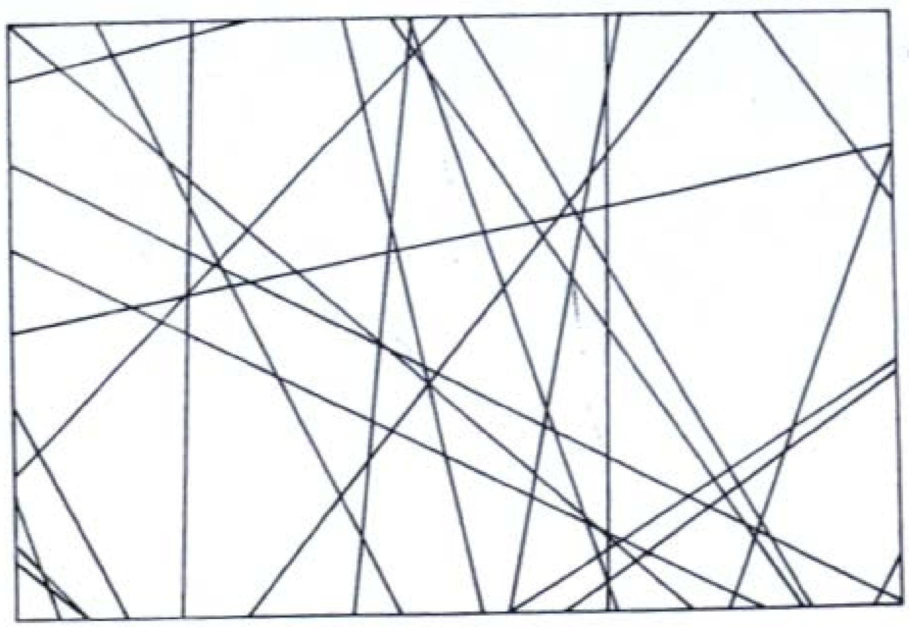
Universität Ulm

Degang Kong

28.01.2010

Inhaltsverzeichnis

- Beispiel:



Poisson Geraden-Mosaik (PGM)

- Sei $\phi = \{l_1, l_2, l_3, \ldots\}$ eine Familie von Geraden im $\mathbb{R}^2$
- Dann ist das Maß gegeben durch

$$\phi(B) = \sum_{l \in \Phi} h_1(l \cap B)$$

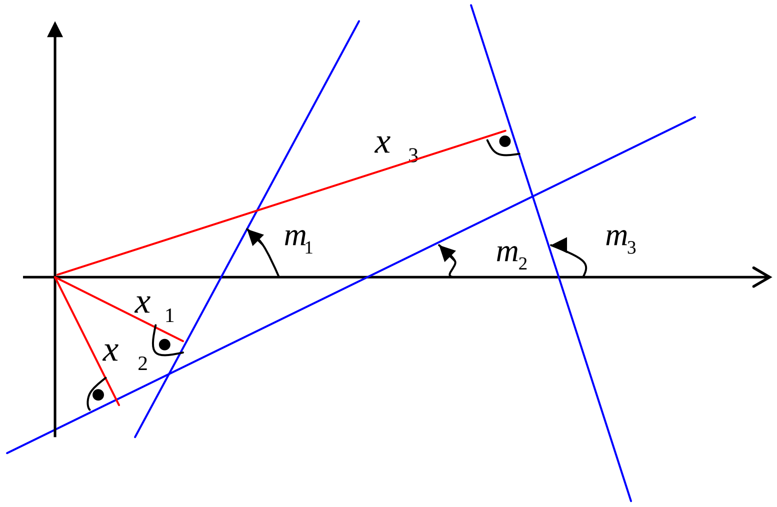
wobei - $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

- h_1 ist das 1-dimensionale Hausdorff Maß

- **Beispiel:**
  - $X=\{X_1,X_2,\ldots\}$ ein stationärer Poisson Prozess auf $\mathbb{R}$ mit Intensität λ
  - $M_i \sim U(0,\pi),\ \forall i$

  $\rightarrow$ Markierter PP

  $(X_1,M_1),(X_2,M_2)\ldots$



Definition:

- Das gewichtete zufällige Maß

$$\Psi(B \times L) = \sum_{l \in \Phi, \alpha(l) \in L} h_1(B \cap l)$$

wobei - $\alpha(l) \in (0, \pi]$ ist die Richtung von l

- $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $L \in \mathcal{B}\big((0, \pi]\big)$

Definition:

- Intensität L_A von Φ : für Φ stationär gilt

$$L_A \nu_2(B) = \mathbf{E}(\Phi(B)) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Definition:

- Intensität L_A von Φ : für Φ stationär gilt

$$L_A \nu_2(B) = \mathbf{E}(\Phi(B)) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

- Intensitätsmaß Λ von Ψ :

$$\Lambda = L_A \cdot \nu_2 \times \mathfrak{R}$$

wobei - $\mathfrak{R}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(0, \pi]$,
heißt “the rose of directions“ oder “Richtungsrose“

Inhaltsverzeichnis

- 2. Planare Faserprozesse
  - 2.1 Grundlagen
    - Fasern und Fasersysteme
    - Faserprozess
  - 2.2 Schnittpunktprozesse
  - 2.3 Schätzung der Richtungsrose

Definition:

- Faser γ ist das Bild der Kurve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ mit den Eigenschaften:
  - $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist einmal stetig differenzierbar
  - $|\gamma'(t)|^2 = |\gamma'_1(t)|^2 + |\gamma'_2(t)|^2 > 0, \forall t \in [0,1]$
  - γ ist injektiv

Definition:

- Faser γ ist das Bild der Kurve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ mit den Eigenschaften:
  - $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist einmal stetig differenzierbar
  - $|\gamma'(t)|^2 = |\gamma'_1(t)|^2 + |\gamma'_2(t)|^2 > 0, \forall t \in [0,1]$
  - γ ist injektiv

- γ kann auch als Maß gesehen werden:

$$\gamma(B) = h_1(\gamma \cap B) = \int_0^1 \mathbf{1}_B(\gamma(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt$$

für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Definition:

- Fasersystem $\phi = \{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots\}$ ist eine abgeschlossene Menge auf $\mathbb{R}^2$, lokal endlich mit $\gamma^{(i)}((0,1)) \cap \gamma^{(j)}((0,1)) = \varnothing$ falls $i \neq j$

  - das entsprechende Längemaß $\phi(B)$:

$$\phi(B) = \sum_{\gamma^{(i)} \in \phi} \gamma^{(i)}(B) \quad \text{für} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Definition:

- Ein (planarer) Faserprozess $\Phi : \Omega \to \mathbb{D}$ ist eine Zufallsvariable, d.h. eine messbare Abbildung vom Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ nach $[\mathbb{D}, \mathcal{D}]$

wobei

- $\mathbb{D}$ ist die Familie von allen Fasersystemen im $\mathbb{R}^2$
- $\mathcal{D}$ ist die von den Mengen $\{\phi \in \mathbb{D} : \phi(B) < x\}$ $B \in B(\mathbb{R}^2)$ kompakt, $x \in \mathbb{R}$ erzeugte σ- Algebra

Definition:

- Ein (planarer) Faserprozess $\Phi : \Omega \to \mathbb{D}$ ist eine Zufallsvariable, d.h. eine messbare Abbildung vom Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ nach $[\mathbb{D}, \mathcal{D}]$

  wobei
  - $\mathbb{D}$ ist die Familie von allen Fasersystemen im $\mathbb{R}^2$
  - $\mathcal{D}$ ist die von den Mengen $\{\phi \in \mathbb{D} : \phi(B) < x\}$ $B \in B(\mathbb{R}^2)$ kompakt, $x \in \mathbb{R}$ erzeugte σ- Algebra

- $\Phi(B)$ bezeichnet auch das Längemaß

$$\Phi(B) = \sum_{\gamma \in \Phi} h_1(\gamma \cap B) \text{ für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Definition:

- Stationarität und Isotropie
  - stationär, falls der verschobene Faserprozess Φ_x die gleiche Verteilung wie Φ besitzt, d.h.

    $$P(Y) = P(Y_x) \qquad \text{für alle } Y \in \mathcal{D} \text{ und alle } x \in \mathbb{R}^2$$

    wobei $Y_x = \{\varphi \in \mathbb{D} : \varphi_{-x} \in Y\}$

  - isotrop, falls sich die Verteilung nach der Drehung um den Ursprung nicht ändert

Definition:

- Intensität
  - Intensitätsmaß:

$$\Lambda(B) = \mathrm{E}(\Phi(\mathrm{B}))=\mathrm{E}\left(\sum_{\gamma\in\Phi} h_1(\gamma \cap B)\right) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

  - falls der Prozess Φ stationär ist, dann gilt

$$\Lambda = L_A v_2$$

Definition:

- Gewichtetes zufälliges Maß $\Psi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{B}((0,\pi]) \to [0,\infty)$ mit

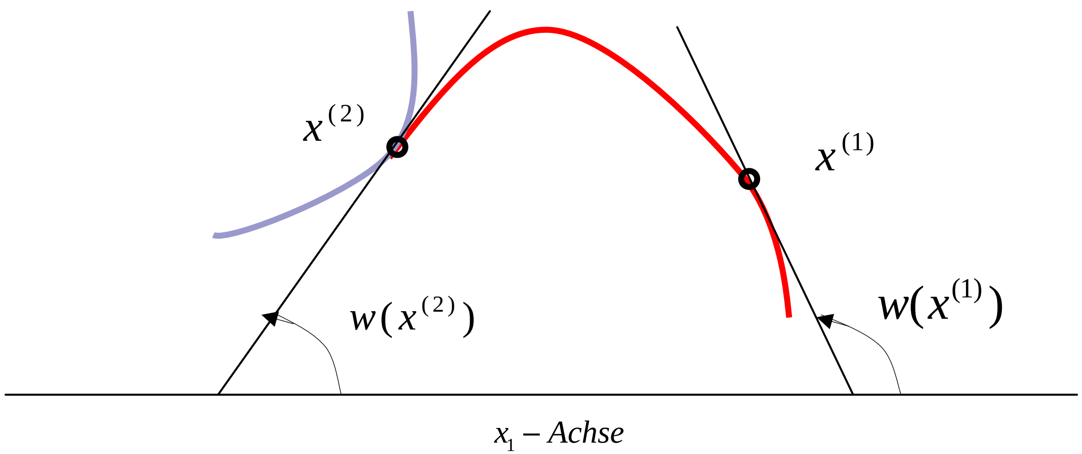
$$\Psi(B \times L) = \int_B \mathbf{1}_L(w(x))\Phi(dx) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\ L \in \mathcal{B}((0,\pi])$$

wobei - $w(x) \in (0,\pi]$ ist die Tangentenrichtung in x

- $\Psi(B \times L)$ ist die Länge aller Fasern in B mit Richtung in L

2. Planare Faserprozesse

2.1 Grundlagen → Faserprozess



Tangentenrichtung $w(x)$

- Intensitätsmaß Λ_Ψ von Ψ

$$\Lambda_\Psi(B \times L) = \mathbf{E}(\Psi(B \times L)) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\ L \in \mathcal{B}((0,\pi])$$

- Intensitätsmaß Λ_Ψ von Ψ

$$\Lambda_\Psi(B \times L) = \mathbf{E}(\Psi(B \times L)) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\ L \in \mathcal{B}((0,\pi])$$

- Falls Ψ stationär ist, dann gilt

$$\Lambda_\Psi(B \times L) = L_A \nu_2(B)\mathfrak{R}(L) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\ L \in \mathcal{B}((0,\pi])$$

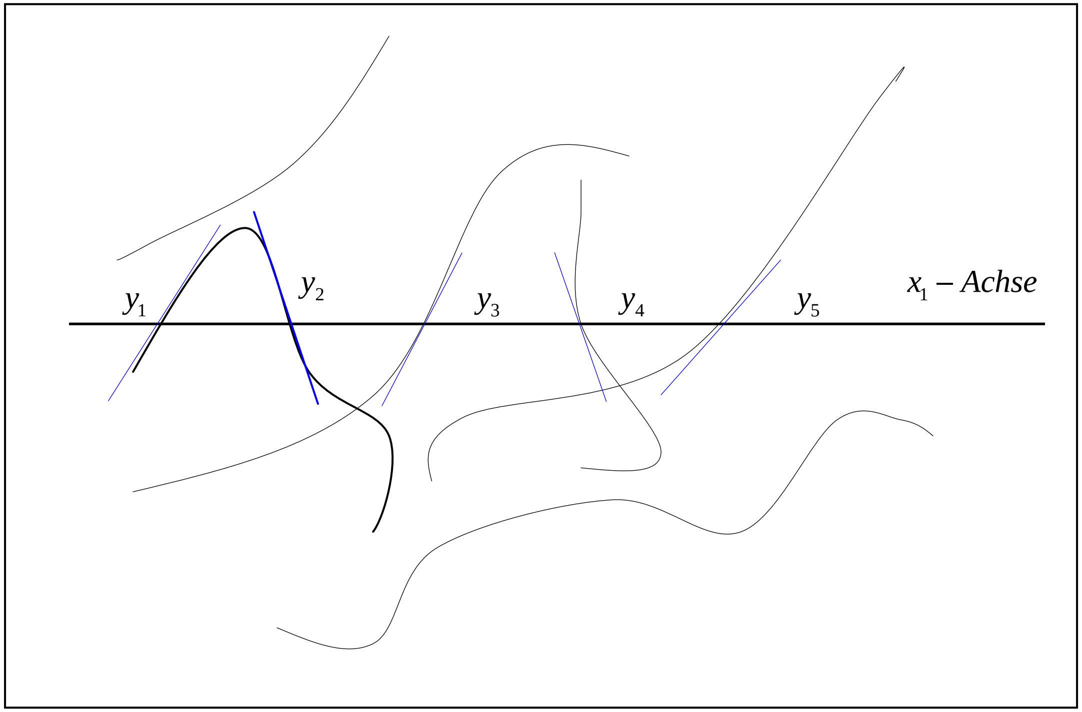
wobei $\mathfrak{R}$ ist die Richtungsrose, wird als Verteilung der Tangentenrichtung in einem ‘typischen‘ Punkt einer Faser bezeichnet.

→Bew.

Inhaltsverzeichnis

- Sei Φ ein stationärer Faserprozess mit
  - Verteilung P
  - Intensität L_A
  - Richtungsrose $\mathfrak{R}$, mit $\mathfrak{R}(\{\pi\}) < 1$
  - eine feste vorgegebene Gerade e (hier: $x_1 - Achse$)

- Sei $\Psi = \{[y_n; w(y_n)]\}$ ein markierter Punktprozess, wobei alle Punkte $y_n \in \Phi \cap e$ mit dem Schnittwinkel zur x_1-Achse $w(y_n)$ markiert sind.



- Seien P_L die Intensität des stationären Prozesses Ψ und H die Markenverteilung auf $(0,\pi]$
  dann gilt:

$$P_L \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,\pi]} h(z,\alpha) H(d\alpha) dz = L_A \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,\pi]} h(z,\alpha) \sin\alpha \, \Re(d\alpha) dz$$

wobei h eine nicht-negative und messbare Funktion auf $\mathbb{R} \times (0,\pi]$ ist

→Bew.

- Folgerung: für alle $\beta \in (0,\pi]$ gilt

$$P_L H((0,\beta]) = L_A \int_{(0,\beta]} \sin\alpha \Re(d\alpha)$$

somit ist die Verteilungsfunktion

$$F_H(\beta) = H((0,\beta]) = \frac{\int_{(0,\beta]} \sin\alpha \; \Re(d\alpha)}{\int_{(0,\pi]} \sin\alpha \; \Re(d\alpha)}$$

→Bew.

- Sei Φ ein stationärer Faserprozess mit
  - Intensität L_A
  - Richtungsrose $\mathfrak{R}$
  - einem vorgegebenen nicht-zufälligen planaren Fasersystem ψ mit der gesamten Länge $L < \infty$

Hier wird der Schnittpunktprozess $\Phi \cap \psi$ diskutiert.

- Die Winkelverteilung η_ψ ist ein Maß auf $(0,\pi]$,mit

$$\eta_\psi(A) = \frac{h_1(\{x \in \psi \ : \ w_\psi(x) \in A\})}{L} \quad \text{für } A \in B((0,\pi])$$

wobei $w_\psi(x)$ ist der Winkel der Fasertangenten von x

- Die Winkelverteilung η_ψ ist ein Maß auf $(0,\pi]$,mit

$$\eta_\psi(A) = \frac{h_1(\{x \in \psi \; : \; w_\psi(x) \in A\})}{L} \quad \text{für } A \in B((0,\pi])$$

wobei $w_\psi(x)$ ist der Winkel der Fasertangenten von x

- Die gesamte Länge $L_\psi(\beta)$ der Projektion von ψ der Richtung $\beta^\perp$

$$L_\psi(\beta) = \int_{l_\beta^\perp} \#\{\psi \bigcap (l_\beta - y)\} dy$$

wobei - l_β ist eine Gerade mit Richtung β und $l_\beta^\perp$ ist die Senkrechte zu l_β

- Beispiel:

Falls ψ ein Kreis mit Radius R ist, dann ist η_ψ gleich verteilt auf $(0,\pi]$ mit

$$L_\psi(\beta) = 2L/\pi$$

Inhaltsverzeichnis

Definition:

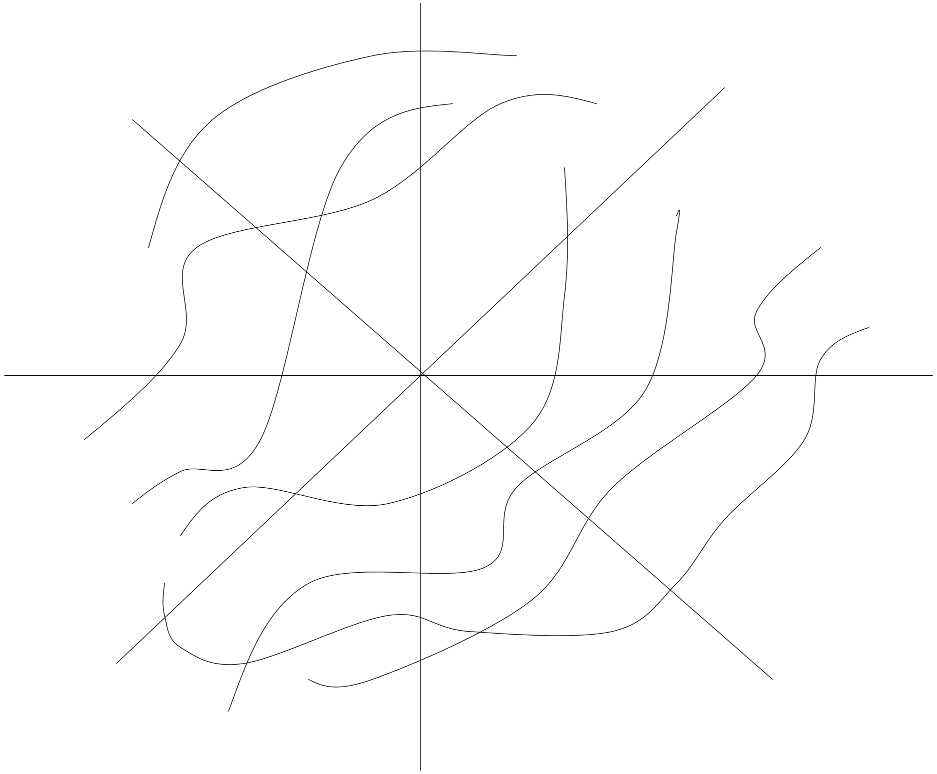
- Schnittpunktrose $P_L(\bullet)$ mit der Dichte $f_{\mathcal{R}}$
- $P_L(\beta)$ Intensität des Punktprozesses der Schnittpunkte von Φ mit einer Geraden mit Winkel β zu e

es gilt:

$$P_L(\beta) = L_A F_{\mathcal{R}}(\beta)$$

wobei - $F_{\mathcal{R}}(\beta) = \int_{(0,\pi]} |\sin(\alpha - \beta)| \mathcal{R}(d\alpha)$

- Beispiel:
  - $\beta_i = (1+i)\dfrac{\pi}{4}, \; i = 0,1,2,3$
  - Anzahl der Schnittpunkte
    3, 7, 7, 6



- Falls $\mathcal{R}$ eine stetige Dichte $f_{\mathcal{R}}$ besitzt, gilt für die Verteilung:

$$F_{\mathcal{R}}(\beta) = \int_0^{\beta} f_{\mathcal{R}}(\alpha)d\alpha = \mathcal{R}((0,\beta])$$

- Durch ableiten erhält man

$$\frac{d^2}{d\beta^2} P_L(\beta) + P_L(\beta) = 2L_A f_{\mathcal{R}}(\beta)$$

- Schätzer:

$$\hat{F}_{\mathcal{R}}(\beta) = \frac{1}{2L_A}\left(\frac{d\hat{P}_L(\beta)}{d\beta} + \int_0^\beta \hat{P}_L(\alpha)d\alpha\right) \quad \text{für} \quad 0 < \beta \le \pi$$

wobei - $\hat{P}_L(\beta) = \frac{\#\{T^{(\beta)} \cap \Phi \cap W\}}{h_1(T^{(\beta)} \cap W)}$, W- Beobachtungsfenster (kompakt), mit $T^{(\beta)}$ ein Testsystem von Linien mit dem Winkel β zur x_1-Achse

Literatur:

[1]. D.Stoyan, W.S.Kendall, J.Mecke(1995) *Stochastic Geometry and its Applications*. J. Wiley & Sons, Chichester

[2]. Prof. Dr. Volker Schmidt, *Räumliche Statistik*. Vorlesungsskript, WS 2007/08, Universität Ulm

[3]. V.Benes, J.Rataj (2004), *Stochastic Geometry: Selected Topics*. Kluwer Academic, New York

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!