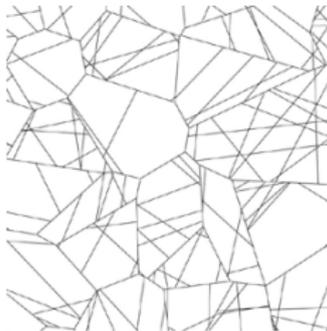


Zufällige Tessellationen I: Modell und Statistik

Max Moldenhauer

14. Dezember 2009



- 1 Tessellationen
 - Wiederholung

- 1 Tessellationen
 - Wiederholung
- 2 Tessellationen der Ebene
 - Definitionen
 - Weitere Charakteristika
 - Eigenschaften im stationären Fall
 - Eigenschaften im Gleichgewichtszustand
 - Statistik für planare, stationäre Tessellationen
 - Beispiel

- 1 Tessellationen
 - Wiederholung
- 2 Tessellationen der Ebene
 - Definitionen
 - Weitere Charakteristika
 - Eigenschaften im stationären Fall
 - Eigenschaften im Gleichgewichtszustand
 - Statistik für planare, stationäre Tessellationen
 - Beispiel
- 3 Tessellationen von Poission-Geradenprozessen
 - Poission-Geradenprozess
 - Crofton-Tessellation

- 1 Tessellationen
 - Wiederholung
- 2 Tessellationen der Ebene
 - Definitionen
 - Weitere Charakteristika
 - Eigenschaften im stationären Fall
 - Eigenschaften im Gleichgewichtszustand
 - Statistik für planare, stationäre Tessellationen
 - Beispiel
- 3 Tessellationen von Poission-Geradenprozessen
 - Poission-Geradenprozess
 - Crofton-Tessellation
- 4 Poisson-Voronoi-Tessellationen
 - Voronoi/Dirichlet-Tessellationen
 - Delaunay-Tessellationen

Tessellationen : Wiederholung

Definition (Tessellation)

Eine Tessellation oder ein Mosaik ist eine Unterteilung der Ebene in Polygone, bzw. eine Unterteilung des Raums in Polyeder.

Tessellationen : Wiederholung

Definition (Tessellation)

Eine Tessellation oder ein Mosaik ist eine Unterteilung der Ebene in Polygone, bzw. eine Unterteilung des Raums in Polyeder.

Definition (Fortsetzung)

Sei $\mathbb{P} = \{p \mid p \subset \mathbb{R}^d, p \neq \emptyset, p \text{ beschränkt, offen, konvex}\}$

Eine Teilmenge $\Theta \subset \mathbb{P}$ heißt Tessellation, falls:

- ① $p_1 \cap p_2 = \emptyset, \forall p_1, p_2 \in \Theta, p_1 \neq p_2$
- ② $\bigcup_{p \in \Theta} \bar{p} = \mathbb{R}^d$
- ③ $B \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt $\Rightarrow \{p \in \Theta \mid p \cap B \neq \emptyset\}$ ist endlich.

Tessellationen : Wiederholung

Definition (Knoten & Kanten)

Die **Knoten** einer Tessellation sind die Ecken ihrer Polygone/Polyeder.

$$E_{\Theta} = \bigcup_{p \in \Theta} \delta p$$

Ein Segment aus E_{Θ} heißt **Kante**, falls ihre Endpunkte Knoten von Θ sind und keine weiteren Knoten sich im Segment befinden. E_{Θ} bildet ein Fasersystem und Θ kann aus E_{Θ} konstruiert werden.

Definitionen

Sei Θ eine Tessellation des \mathbb{R}^2 , E_Θ die Menge der Kanten von Θ

- $\alpha_0(\Theta)$: Menge der Knoten von Θ

Definitionen

Sei Θ eine Tessellation des \mathbb{R}^2 , E_Θ die Menge der Kanten von Θ

- $\alpha_0(\Theta)$: Menge der Knoten von Θ
- $\alpha_1(\Theta)$: Menge der Kantenmittelpunkte von Θ

Definitionen

Sei Θ eine Tessellation des \mathbb{R}^2 , E_Θ die Menge der Kanten von Θ

- $\alpha_0(\Theta)$: Menge der Knoten von Θ
- $\alpha_1(\Theta)$: Menge der Kantenmittelpunkte von Θ
- $\alpha_2(\Theta)$: Menge der Schwerpunkte der Polygone von Θ

Definitionen

Sei Θ eine Tessellation des \mathbb{R}^2 , E_Θ die Menge der Kanten von Θ

- $\alpha_0(\Theta)$: Menge der Knoten von Θ
- $\alpha_1(\Theta)$: Menge der Kantenmittelpunkte von Θ
- $\alpha_2(\Theta)$: Menge der Schwerpunkte der Polygone von Θ
- Die Intensitäten von $\alpha_k(\Theta)$ werden durch $\lambda_k (k = 0, 1, 2)$ angegeben. L_A heißt die Intensität von E_Θ

Weitere Charakteristika

Sei $p(x) \in \Theta$ das Polygon, das x enthält:

- **Markierungen für Knoten (α_0):**

$$x \in \alpha_0(\Theta):$$

$$n_{02}(x) = \#\{p \in \Theta \mid x \in \bar{p}\}$$

$$l_0(x) = \text{totale Länge der Kanten, ausgehend von } x$$

Weitere Charakteristika

Sei $p(x) \in \Theta$ das Polygon, das x enthält:

- **Markierungen für Knoten (α_0):**

$$x \in \alpha_0(\Theta):$$

$$n_{02}(x) = \#\{p \in \Theta \mid x \in \bar{p}\}$$

$l_0(x)$ = totale Länge der Kanten, ausgehend von x

- **Markierungen für Kantenmittelpunkte (α_1):**

$$x \in \alpha_1(\Theta):$$

$l_1(x)$ = Länge der Kante, die durch x geht

Weitere Charakteristika

Sei $p(x) \in \Theta$ das Polygon, das x enthält:

- **Markierungen für Knoten (α_0):**

$$x \in \alpha_0(\Theta):$$

$$n_{02}(x) = \#\{p \in \Theta \mid x \in \bar{p}\}$$

$l_0(x)$ = totale Länge der Kanten, ausgehend von x

- **Markierungen für Kantenmittelpunkte (α_1):**

$$x \in \alpha_1(\Theta):$$

$l_1(x)$ = Länge der Kante, die durch x geht

- **Markierungen für Zell-Schwerpunkte (α_2):**

$$x \in \alpha_2(\Theta):$$

$$n_{20}(x) = \#\{y \mid y \in \alpha_0(\Theta), y \cap \bar{p}(x) \neq \emptyset\}$$

$$l_2(x) = \nu_1(\partial p(x))$$

$$a_2(x) = \nu_2(p(x))$$

Weitere Charakteristika

Sei $p(x) \in \Theta$ das Polygon, das x enthält:

- **Markierungen für Knoten (α_0):**

$$x \in \alpha_0(\Theta):$$

$$n_{02}(x) = \#\{p \in \Theta \mid x \in \bar{p}\}$$

$l_0(x)$ = totale Länge der Kanten, ausgehend von x

- **Markierungen für Kantenmittelpunkte (α_1):**

$$x \in \alpha_1(\Theta):$$

$l_1(x)$ = Länge der Kante, die durch x geht

- **Markierungen für Zell-Schwerpunkte (α_2):**

$$x \in \alpha_2(\Theta):$$

$$n_{20}(x) = \#\{y \mid y \in \alpha_0(\Theta), y \cap \bar{p}(x) \neq \emptyset\}$$

$$l_2(x) = \nu_1(\partial p(x))$$

$$a_2(x) = \nu_2(p(x))$$

- Entsprechende Markenmittelwerte werden mit \bar{l}_0 , \bar{l}_1 , etc. bezeichnet

Eigenschaften im stationären Fall

- $\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (Vergleiche: $E - K + F = 2$)

Eigenschaften im stationären Fall

- $\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (Vergleiche: $E - K + F = 2$)
- $\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0}$

Eigenschaften im stationären Fall

- $\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (Vergleiche: $E - K + F = 2$)
- $\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0}$
- $\bar{n}_{20} = 2 + \frac{2\lambda_0}{\lambda_2}$

Eigenschaften im stationären Fall

- $\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (Vergleiche: $E - K + F = 2$)
- $\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0}$
- $\bar{n}_{20} = 2 + \frac{2\lambda_0}{\lambda_2}$
- $\bar{l}_0 = \frac{2L_A}{\lambda_0}$

Eigenschaften im stationären Fall

- $\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (Vergleiche: $E - K + F = 2$)
- $\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0}$
- $\bar{l}_0 = \frac{2L_A}{\lambda_0}$
- $\bar{n}_{20} = 2 + \frac{2\lambda_0}{\lambda_2}$
- $\bar{l}_2 = \frac{2L_A}{\lambda_2}$

Eigenschaften im stationären Fall

- $\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (Vergleiche: $E - K + F = 2$)
- $\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0}$
- $\bar{l}_0 = \frac{2L_A}{\lambda_0}$
- $\bar{a}_2 = \frac{1}{\lambda_2}$
- $\bar{n}_{20} = 2 + \frac{2\lambda_0}{\lambda_2}$
- $\bar{l}_2 = \frac{2L_A}{\lambda_2}$

Eigenschaften im stationären Fall

- $\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (Vergleiche: $E - K + F = 2$)
- $\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0}$
- $\bar{l}_0 = \frac{2L_A}{\lambda_0}$
- $\bar{a}_2 = \frac{1}{\lambda_2}$
- $\bar{n}_{20} = 2 + \frac{2\lambda_0}{\lambda_2}$
- $\bar{l}_2 = \frac{2L_A}{\lambda_2}$
- $\bar{l}_1 = \frac{L_A}{(\lambda_0 + \lambda_2)} = \frac{L_A}{\lambda_1}$

Eigenschaften im stationären Fall

- $\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (Vergleiche: $E - K + F = 2$)
- $\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0}$
- $\bar{l}_0 = \frac{2L_A}{\lambda_0}$
- $\bar{a}_2 = \frac{1}{\lambda_2}$
- $\frac{1}{\bar{n}_{02}} + \frac{1}{\bar{n}_{20}} = \frac{1}{2}$
- $\bar{l}_0 = \bar{n}_{02}\bar{l}_1$
- $\bar{l}_2 = \bar{n}_{20}\bar{l}_1$
- $\bar{n}_{20} = 2 + \frac{2\lambda_0}{\lambda_2}$
- $\bar{l}_2 = \frac{2L_A}{\lambda_2}$
- $\bar{l}_1 = \frac{L_A}{(\lambda_0 + \lambda_2)} = \frac{L_A}{\lambda_1}$
- $3 \leq \bar{n}_{02}, \bar{n}_{20} \leq 6$
- $0 < \lambda_0 \leq 2\lambda_2 \leq 4\lambda_0$
- $L_A \geq 0$

Eigenschaften im Gleichgewichtszustand

Der *normale Gleichgewichtszustand* (engl.: *ordinary equilibrium state*) ist ein wichtiger Spezialfall, bei dem jede Ecke genau 3 benachbarte zellen hat, bzw. von jeder Ecke gehen 3 Kanten aus:

$$\bar{n}_{02} = n_{02}(x) \equiv 3$$

⇒

$$\bar{n}_{20} = 6 \quad 2\lambda_2 = \lambda_0 \quad 2\lambda_1 = 3\lambda_0$$

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

Es reicht aus, L_A , λ_0 und λ_2 zu schätzen:

- **Schätzer für L_A :**

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

Es reicht aus, L_A , λ_0 und λ_2 zu schätzen:

- **Schätzer für L_A :**
 - Allgemeine Methoden zur Schätzung → Vortrag Faserprozesse

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

Es reicht aus, L_A , λ_0 und λ_2 zu schätzen:

- **Schätzer für L_A :**
 - Allgemeine Methoden zur Schätzung → Vortrag Faserprozesse
 - Isotropie: $L_A = \frac{\pi}{2} P_L$, P_L die Intensität des Schnitt-PP der Testlinie.

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

Es reicht aus, L_A , λ_0 und λ_2 zu schätzen:

- **Schätzer für L_A :**

- Allgemeine Methoden zur Schätzung → Vortrag Faserprozesse
- Isotropie: $L_A = \frac{\pi}{2} P_L$, P_L die Intensität des Schnitt-PP der Testlinie.

- **Schätzer für λ_0 :**

Sei ein Beobachtungsfenster W gegeben mit Fläche $A(W)$:

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{\#\{\text{Knoten in } W\}}{A(W)} \quad (\text{unverzerrt})$$

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

- **Schätzer für λ_2 :**

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

- **Schätzer für λ_2 :**
 - Falls $n_{02} \equiv 3$:

$$\hat{\lambda}_2^{(1)} = \frac{\hat{\lambda}_0}{2}$$

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

- **Schätzer für λ_2 :**

- Falls $n_{02} \equiv 3$:

$$\hat{\lambda}_2^{(1)} = \frac{\hat{\lambda}_0}{2}$$

- **Isotropie:**

W konvexes Beobachtungsfenster

$N(W)$ = Anzahl der Zellen, die nicht disjunkt sind mit W .

$N_e(W)$ = Anzahl der Schnitte der Kanten mit ∂W .

$$\hat{\lambda}_2^{(2)} = (N(W) - 1 - \frac{1}{2}N_e(W))/A(W)$$

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

- W Rechteck und die Zellen sind so klein, dass sie überwiegend 2 Kantenschnitte erzeugen:

$$\hat{\lambda}_2^{(3)} = (z(W) + \frac{1}{2}w(W) + \frac{1}{4}u(W))/A(W)$$

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

- W Rechteck und die Zellen sind so klein, dass sie überwiegend 2 Kantenschnitte erzeugen:

$$\hat{\lambda}_2^{(3)} = (z(W) + \frac{1}{2}w(W) + \frac{1}{4}u(W))/A(W)$$

$z(W)$ = Anzahl Zellen, die komplett in W liegen.

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

- W Rechteck und die Zellen sind so klein, dass sie überwiegend 2 Kantenschnitte erzeugen:

$$\hat{\lambda}_2^{(3)} = (z(W) + \frac{1}{2}w(W) + \frac{1}{4}u(W))/A(W)$$

$z(W)$ =Anzahl Zellen, die komplett in W liegen.

$w(W)$ =Anzahl Zellen, die eine Seite von W schneiden, aber nicht eine Ecke.

Statistik für planare, stationäre Tessellationen

- W Rechteck und die Zellen sind so klein, dass sie überwiegend 2 Kantenschnitte erzeugen:

$$\hat{\lambda}_2^{(3)} = (z(W) + \frac{1}{2}w(W) + \frac{1}{4}u(W))/A(W)$$

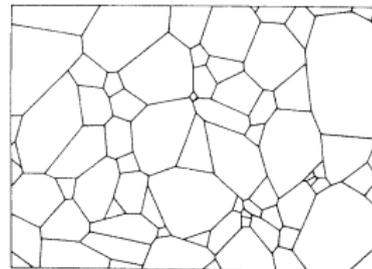
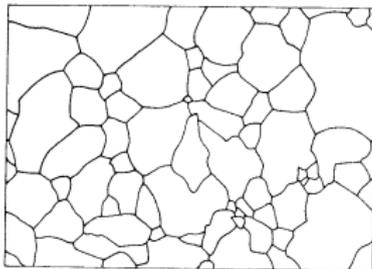
$z(W)$ =Anzahl Zellen, die komplett in W liegen.

$w(W)$ =Anzahl Zellen, die eine Seite von W schneiden, aber nicht eine Ecke.

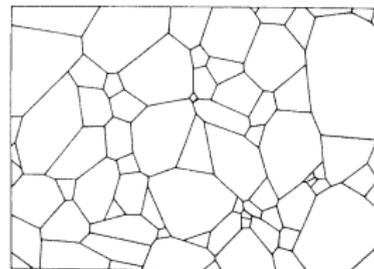
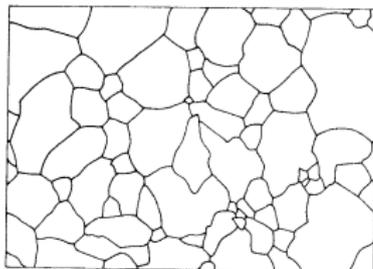
$u(W)$ =Anzahl Zellen, die eine Ecke von W enthalten.

Beispiel

Beispiel

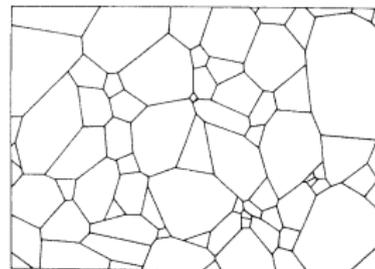
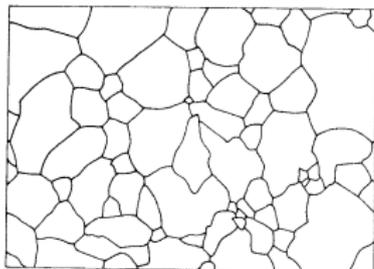


Beispiel



- Anzahl Knoten : 124
- $N(W)$: 78
- $N_e(W)$: 30
- $A(W)$: 180

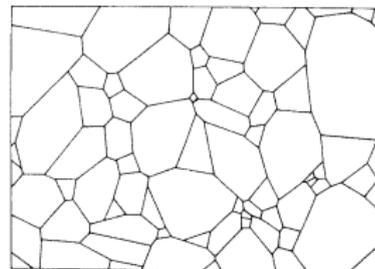
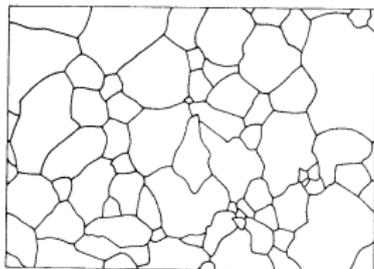
Beispiel



- Anzahl Knoten : 124
- $N(W)$: 78
- $N_e(W)$: 30
- $A(W)$: 180

- $\hat{L}_A = 0.96$

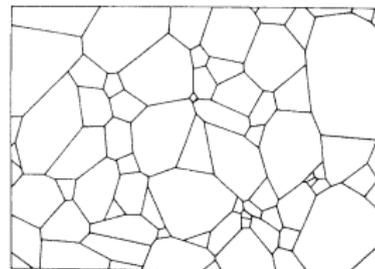
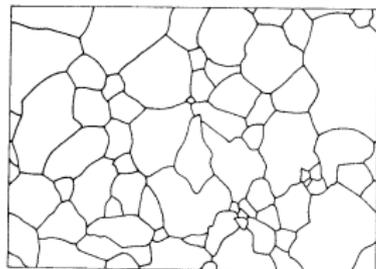
Beispiel



- Anzahl Knoten : 124
- $N(W)$: 78
- $N_e(W)$: 30
- $A(W)$: 180

- $\hat{L}_A = 0.96$
- $\hat{\lambda}_0 \approx 0.69$

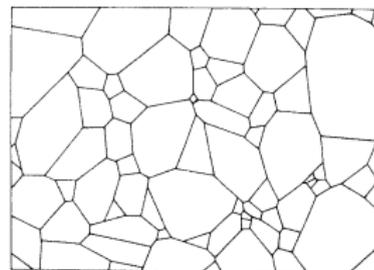
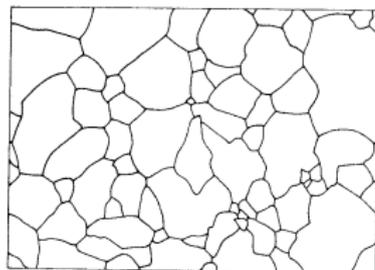
Beispiel



- Anzahl Knoten : 124
- $N(W)$: 78
- $N_e(W)$: 30
- $A(W)$: 180

- $\hat{L}_A = 0.96$
- $\hat{\lambda}_0 \approx 0.69$
- $\hat{\lambda}_2^{(1)} = \frac{\hat{\lambda}_0}{2} \approx 0.345$

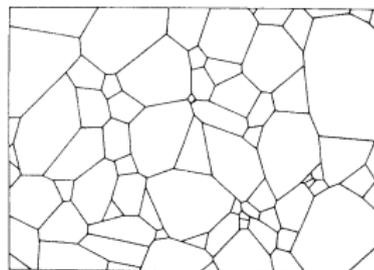
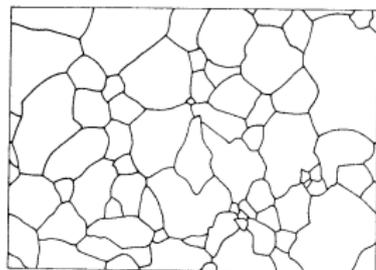
Beispiel



- Anzahl Knoten : 124
- $N(W)$: 78
- $N_e(W)$: 30
- $A(W)$: 180

- $\hat{L}_A = 0.96$
- $\hat{\lambda}_0 \approx 0.69$
- $\hat{\lambda}_2^{(1)} = \frac{\hat{\lambda}_0}{2} \approx 0.345$
- $\hat{\lambda}_2^{(2)} \approx 0.344$

Beispiel



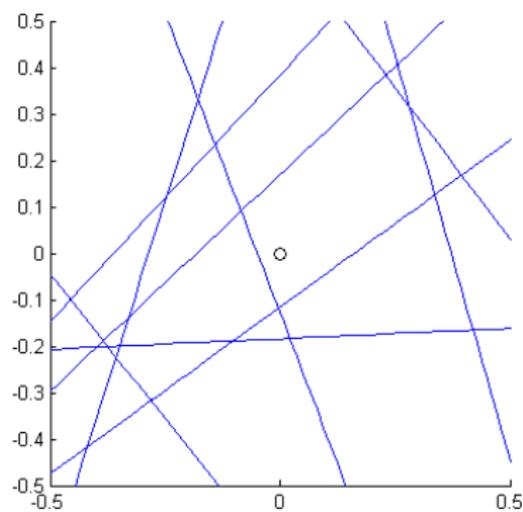
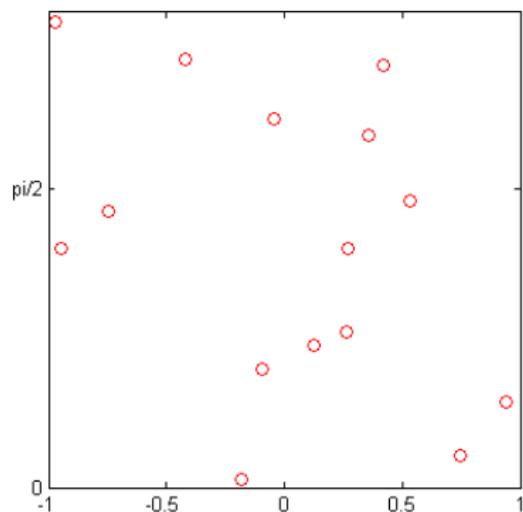
- Anzahl Knoten : 124
- $N(W)$: 78
- $N_e(W)$: 30
- $A(W)$: 180

- $\hat{L}_A = 0.96$
- $\hat{\lambda}_0 \approx 0.69$
- $\hat{\lambda}_2^{(1)} = \frac{\hat{\lambda}_0}{2} \approx 0.345$
- $\hat{\lambda}_2^{(2)} \approx 0.344$
- $\hat{\lambda}_2^{(3)} \approx 0.344$

Poisson-Geradenprozess

Gegeben sei ein markierter, homogener Poissonpunktprozess (ϕ, α) .
 $\phi = (\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim U[0, \pi)$ Aus diesem markierten
 PP lässt sich ein Poisson-Geradenprozess Ψ bilden. Die Linie zu
 einem markierten Punkt (ϕ_n, α_n) wird durch den orthogonalen
 Abstand ϕ_n zum Ursprung und durch den Winkel α_n zur x-Achse
 gegeben.

Beispiel



Crofton- / Poissongeraden-Tessellation

Sei

- Ψ ein bewegungsinvarianter Poisson-Geradenprozess mit Intensität L_A

Crofton- / Poissongeraden-Tessellation

Sei

- Ψ ein bewegungsinvarianter Poisson-Geradenprozess mit Intensität L_A
- Θ Tessellation mit $\Psi = E_\Theta$

Crofton- / Poissongeraden-Tessellation

Sei

- Ψ ein bewegungsinvarianter Poisson-Geradenprozess mit Intensität L_A
- Θ Tessellation mit $\Psi = E_\Theta$
- Sei $\varrho = \frac{2L_A}{\pi} (= P_L)$ die mittlere Anzahl von Schnittpunkten von einer Testlinie mit Ψ pro Länge der Testlinie .

Crofton- / Poissongeraden-Tessellation

Sei

- Ψ ein bewegungsinvarianter Poisson-Geradenprozess mit Intensität L_A
- Θ Tessellation mit $\Psi = E_\Theta$
- Sei $\varrho = \frac{2L_A}{\pi}$ ($= P_L$) die mittlere Anzahl von Schnittpunkten von einer Testlinie mit Ψ pro Länge der Testlinie .

Es gilt:

$$\bar{l}_1 = \frac{1}{\varrho} \quad n_{02} \equiv 4 \quad f.s.$$

Crofton- / Poissongeraden-Tessellation

Sei

- Ψ ein bewegungsinvarianter Poisson-Geradenprozess mit Intensität L_A
- Θ Tessellation mit $\Psi = E_\Theta$
- Sei $\varrho = \frac{2L_A}{\pi} (= P_L)$ die mittlere Anzahl von Schnittpunkten von einer Testlinie mit Ψ pro Länge der Testlinie .

Es gilt:

$$\bar{l}_1 = \frac{1}{\varrho} \quad n_{02} \equiv 4 \quad f.s.$$

Daher gilt:

- $\lambda_0 = \frac{\pi\varrho^2}{4}$
- $\bar{l}_0 = \frac{4}{\varrho}$
- $\lambda_1 = \frac{\pi\varrho^2}{2}$
- $\lambda_2 = \frac{\pi\varrho^2}{4} (= \lambda_0)$

Crofton- / Poissongeraden-Tessellation

Betrachte $\alpha_2(\Theta)$ markiert mit der jeweiligen Zelle. Die Verteilung der Markierung entspricht der Verteilung des „typischen“ Polygons der Tessellation, dem Poisson- oder Crofton-Polygon.

Crofton- / Poissongeraden-Tessellation

Betrachte $\alpha_2(\Theta)$ markiert mit der jeweiligen Zelle. Die Verteilung der Markierung entspricht der Verteilung des „typischen“ Polygons der Tessellation, dem Poisson- oder Crofton-Polygon.

- $\bar{a}_2 = \frac{4}{\pi \rho^2}$
- $\bar{l}_2 = \frac{4}{\rho}$
- $\bar{n}_{20} = 4$

Crofton- / Poissongeraden-Tessellation

Betrachte $\alpha_2(\Theta)$ markiert mit der jeweiligen Zelle. Die Verteilung der Markierung entspricht der Verteilung des „typischen“ Polygons der Tessellation, dem Poisson- oder Crofton-Polygon.

- $\bar{a}_2 = \frac{4}{\pi \rho^2}$
- $\bar{l}_2 = \frac{4}{\rho}$
- $\bar{n}_{20} = 4$

n	p_n (approximativ)
3	0.355
4	0.381
5	0.192
6	0.059
⋮	⋮

Crofton- / Poissongeraden-Tessellation

Betrachte $\alpha_2(\Theta)$ markiert mit der jeweiligen Zelle. Die Verteilung der Markierung entspricht der Verteilung des „typischen“ Polygons der Tessellation, dem Poisson- oder Crofton-Polygon.

- $\bar{a}_2 = \frac{4}{\pi \rho^2}$
- $\bar{l}_2 = \frac{4}{\rho}$
- $\bar{n}_{20} = 4$

n	p_n (approximativ)
3	0.355
4	0.381
5	0.192
6	0.059
⋮	⋮

$$p_n \approx \frac{e^{-1}}{(n-3)!} \quad n = 3, 4, \dots$$

Voronoi/Dirichlet-Tessellationen

Sei φ ein lokal endliches System von Punkten auf \mathbb{R}^d . Fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ haben einen eindeutigen **nächsten Punkt** $n(x) \in \varphi$.

Voronoi/Dirichlet-Tessellationen

Sei φ ein lokal endliches System von Punkten auf \mathbb{R}^d . Fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ haben einen eindeutigen **nächsten Punkt** $n(x) \in \varphi$.

Die **Nachbarschaft** $T(y)$, $y \in \varphi$ ist:

$$T(y) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid n(x) = y\}$$

$T(y)$ ist ein offenes konvexes Polygon $\forall y \in \varphi$.

Voronoi/Dirichlet-Tessellationen

Sei φ ein lokal endliches System von Punkten auf \mathbb{R}^d . Fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ haben einen eindeutigen **nächsten Punkt** $n(x) \in \varphi$.

Die **Nachbarschaft** $T(y)$, $y \in \varphi$ ist:

$$T(y) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid n(x) = y\}$$

$T(y)$ ist ein offenes konvexes Polygon $\forall y \in \varphi$.

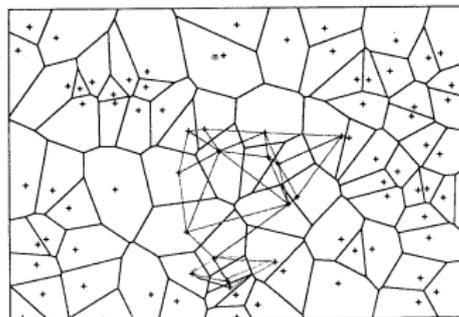
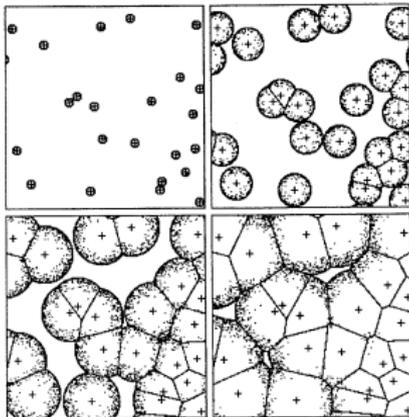
Falls $T(y)$ beschränkt $\forall y \in \varphi$, dann heißt

$$\mathcal{V}(\varphi) = \{T(y) \mid y \in \varphi\}$$

Voronoi-Tessellation. Falls $d=2$: **Dirichlet-Tessellation**

Voronoi/Dirichlet-Tessellationen

Voronoi/Dirichlet-Tessellationen



Poisson-Dirichlet-Tessellation

Eine **Poisson-Dirichlet-Tessellation** ist die Dirichlet-Tessellation auf einem homogenen Poissonpunktprozess. (PPP)
 Sei τ die Intensität des PPP. Es gilt f.s. der normale Gleichgewichtszustand:

Poisson-Dirichlet-Tessellation

Eine **Poisson-Dirichlet-Tessellation** ist die Dirichlet-Tessellation auf einem homogenen Poissonpunktprozess. (PPP)
Sei τ die Intensität des PPP. Es gilt f.s. der normale Gleichgewichtszustand:

- $\lambda_0 = 2\tau$

Poisson-Dirichlet-Tessellation

Eine **Poisson-Dirichlet-Tessellation** ist die Dirichlet-Tessellation auf einem homogenen Poissonpunktprozess. (PPP)

Sei τ die Intensität des PPP. Es gilt f.s. der normale Gleichgewichtszustand:

- $\lambda_0 = 2\tau$
- $\lambda_1 = 3\tau$

Poisson-Dirichlet-Tessellation

Eine **Poisson-Dirichlet-Tessellation** ist die Dirichlet-Tessellation auf einem homogenen Poissonpunktprozess. (PPP)

Sei τ die Intensität des PPP. Es gilt f.s. der normale Gleichgewichtszustand:

- $\lambda_0 = 2\tau$
- $\lambda_1 = 3\tau$
- $\lambda_2 = \tau$

Poisson-Dirichlet-Tessellation

Eine **Poisson-Dirichlet-Tessellation** ist die Dirichlet-Tessellation auf einem homogenen Poissonpunktprozess. (PPP)

Sei τ die Intensität des PPP. Es gilt f.s. der normale Gleichgewichtszustand:

- $\lambda_0 = 2\tau$
- $\lambda_1 = 3\tau$
- $\lambda_2 = \tau$
- $L_A = 2\sqrt{\tau}$

Poisson-Dirichlet-Tessellation

Eine **Poisson-Dirichlet-Tessellation** ist die Dirichlet-Tessellation auf einem homogenen Poissonpunktprozess. (PPP)

Sei τ die Intensität des PPP. Es gilt f.s. der normale Gleichgewichtszustand:

- $\lambda_0 = 2\tau$
- $\lambda_1 = 3\tau$
- $\lambda_2 = \tau$
- $L_A = 2\sqrt{\tau}$

n	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	0.011	0.107	0.259	0.295	0.199	0.090	0.030	0.007

Definition

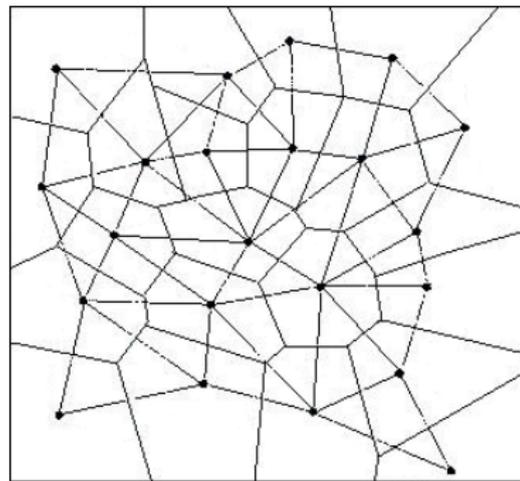
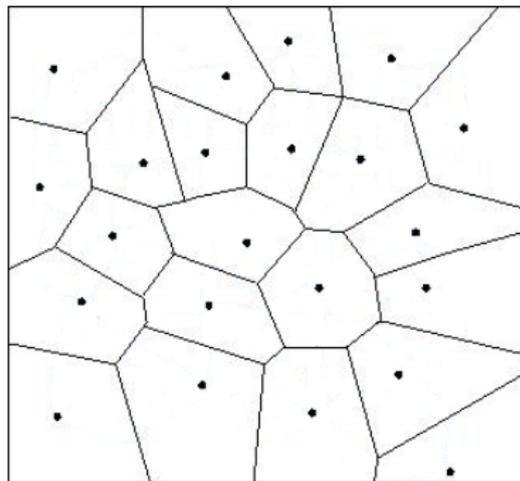
Definition (Delaunay-Tessellation der Ebene)

Sei Θ eine beliebige Tessellation auf \mathbb{R}^2

Die Tessellation, die aus Verbinden der Zellschwerpunkte benachbarter Zellen zu Polygonen entsteht, ist die

Delaunay-Tessellation.

Delaunay-Tessellation



Delaunay-Tessellation

Gegeben sei die zur Poisson-Dirichlet-Tessellation Θ korrespondierende Delaunay-Tessellation Ξ
 τ die Intensität des zugrunde liegenden PPP, dann gilt:

- $\lambda_0^\Xi = \tau = \lambda_2^\Theta$
- $\lambda_1^\Xi = 3\tau = \lambda_1^\Theta$
- $\lambda_2^\Xi = 2\tau = \lambda_0^\Theta$
- $L_A^\Xi = \frac{32}{3\pi} \sqrt{\tau}$

Delaunay-Tessellationen

Sei f_A die Dichte für die Fläche und f_L die Dichte für den Umfang für das typische Delaunay-Polygon. Es gilt:

Delaunay-Tessellationen

Sei f_A die Dichte für die Fläche und f_L die Dichte für den Umfang für das typische Delaunay-Polygon. Es gilt:

$$f_A(a) = \frac{8}{9} \pi a \sqrt{\pi} \left(\frac{\pi a}{3\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{6}} \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}} t\right) (t^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} dt \quad (a \geq 0)$$

Delaunay-Tessellationen

Sei f_A die Dichte für die Fläche und f_L die Dichte für den Umfang für das typische Delaunay-Polygon. Es gilt:

$$f_A(a) = \frac{8}{9} \pi a \sqrt{\pi} \left(\frac{\pi a}{3\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{6}} \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}} t\right) (t^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} dt \quad (a \geq 0)$$

$$f_L(r) = \frac{\tau \pi r}{3} \left(\sqrt{\tau} r \exp\left(-\frac{\tau \pi r^2}{4}\right) \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\tau \pi} r}{2}}^{\infty} \exp(-t^2) dt \quad (r \geq 0)$$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.
Frohe Weihnachten und einen guten
Rutsch!



Literatur

- D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke:
Stochastic Geometry and its Applications
- Titelbild: <http://www.uni-ulm.de/en/mawi/mawi-stochastik/research/projekte/dfg-collaborative-research-centre-518-institute-of-stochastics.html>
- Delaunay-Tessellation :
<http://www.tcs.hut.fi/satu/mja/voronoi.jpg>