Faserprozesse im $\mathbb{R}^2$

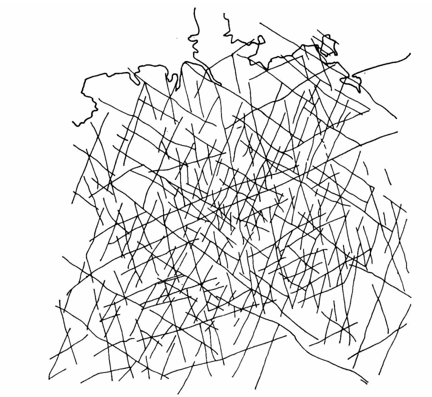
Seminar stochastische Geometrie

Simona Renner

25. Januar 2010

Contents

Faserprozesse



Definitionen

Faser:
glatte Kurve endlicher Länge in der Ebene

Faser γ ist das Bild der Kurve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ mit

(i) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ ist einmal stetig differenzierbar

(ii) $|\gamma'(t)|^2 = |\gamma_1'(t)|^2 + |\gamma_2'(t)|^2 > 0$ für alle t

(iii) die Abbildung γ ist injektiv

Definitionen

Doppeldeutige Verwendung von γ:
γ steht auch für das Maß

$$\gamma(B) = h_1(\gamma \cap B) = \int_0^1 \mathbb{1}_B(\gamma(t))\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Länge der Faser γ, die in B liegt.

Definitionen

Fasersysteme ϕ:

- abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$
- Für Fasern $\gamma^{(i)}$

$$\phi := \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma^{(i)}$$

- Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^2$

$$K \cap \gamma^{(i)} \neq \emptyset \text{ nur für endlich viele } i$$

-

$$\gamma^{(i)}((0,1)) \cap \gamma^{(j)}((0,1)) = \emptyset \text{ falls } i \neq j$$

Definitionen

Doppeldeutige Verwendung von ϕ:
Längenmaß:

$$\phi(B) = \sum_{\gamma^{(i)} \in \phi} \gamma^{(i)}(B) = \sum_{\gamma^{(i)} \in \phi} h_1(\gamma^{(i)} \cap B)$$

für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Gesamtlänge aller Fasern von ϕ, die in B liegen.

Eigenschaften von Fasersystemen

- Fasersystem ϕ kann Schnittpunkte enthalten
- die Definition des Fasersystem ϕ ist nicht eindeutig

Eigenschaften von Fasersystemen

- Fasersystem ϕ kann Schnittpunkte enthalten
- die Definition des Fasersystem ϕ ist nicht eindeutig
- Maß ϕ nur abhängig von der Vereinigung aller Fasern

Eigenschaften von Fasersystemen

- Fasersystem ϕ kann Schnittpunkte enthalten
- die Definition des Fasersystem ϕ ist nicht eindeutig
- Maß ϕ nur abhängig von der Vereinigung aller Fasern

Definitionen

Faserprozesse Φ:

- $\mathbb{D}$ Familie aller Fasersysteme im $\mathbb{R}^2$, mit σ-Algebra $\mathcal{D}$, erzeugt von Mengen der Form

  $$\{\phi \in \mathbb{D} : \phi(B) < x\}$$

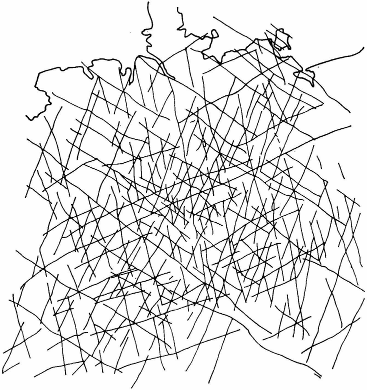
  x$\in \mathbb{R}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ eine kompakte Menge
- Φ Zufallsvariable mit Werten in $[\mathbb{D}, \mathcal{D}]$, also messbare Abbildung aus $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ nach $[\mathbb{D}, \mathcal{D}]$.

Definitionen

- Φ bezeichnet auch das zugehörige zufällige Längenmaß
- Die Verteilung P des Faserprozesses Φ ist definiert durch

$$P(D) = \mathbf{P}\big(\{\omega \,:\, \Phi(\omega) \in D\,\}\big) \quad \text{für } D \in \mathcal{D}$$

reale Beobachtungen



Störungszonen von Erdbeben

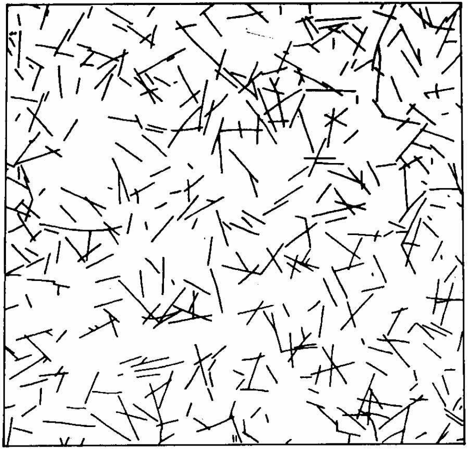
Boolesches Modell

- $\{x_1, x_2, \dots\}$ (Keime) stationärer Poissonsprozess im $\mathbb{R}^2$ mit Intensität λ
- $\Xi_1, \Xi_2, \dots$ (Kerne) Folge von i.i.d. zufälligen kompakten Mengen im $\mathbb{R}^2$
- konstruiertes Boolesches Modell

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + x_n)$$

- Falls die Kerne Kurven sind, ergibt sich ein Faserprozess.

Boolesches Modell



simuliertes Boolesches Modell

Stationarität und Isotropie

- Faserprozess Φ *stationär*:

$$P(Y) = P(Y_x) \text{ für alle } Y \text{ in } \mathcal{D} \text{ und alle } x \text{ in } \mathbb{R}^2$$

mit $Y_x = \{\varphi \in \mathbb{D} : \varphi_{-x} \in Y\}$.

- Faserprozess Φ *isotrop*: Verteilung bleibt bei Rotationen um den Ursprung gleich

Intensität

Intensitätsmaß Λ eines Faserprozesses:

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}\left[\Phi(B)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{\gamma \in \Phi} h_1(\gamma \cap B)\right]$$

für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Intensität

Für stationäres Φ gilt

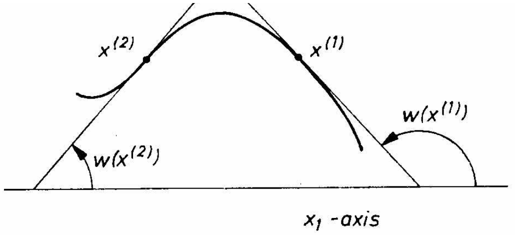
$$\Lambda = L_A \nu_2$$

mit Konstante $0 \leq L_A \leq \infty$ der *Intensität* von Φ.

Richtungsrose/Richtungsverteilung

- In Punkt x definiert man eine Tangente an den Faserprozess
- bildet Winkel $w(x)$ mit x_1-Achse

Bsp.:



Richtungsrose/Richtungsverteilung

Zufallsmaß Ψ:

$$\Psi(B \times L) = \int_B \mathbb{1}_L(w(x))\, \Phi(\mathrm{d}x)$$

mit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und $L \in \mathcal{B}((0,\pi])$

$\Psi(B \times L)$ Gesamtlänge aller Faserteile von Φ die in B liegen und eine Tangentenrichtung haben, die in L liegt.

Richtungsrose/Richtungsverteilung

Λ_Ψ Intensitätsmaß von Ψ:

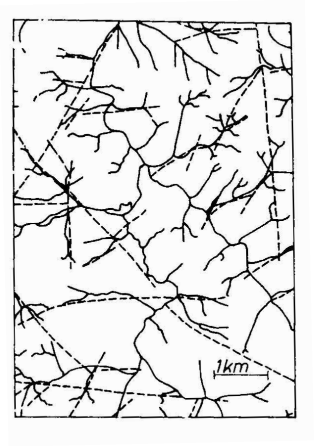
$$\Lambda_\Psi(B \times L) = \mathbb{E}\left[\Psi(B \times L)\right].$$

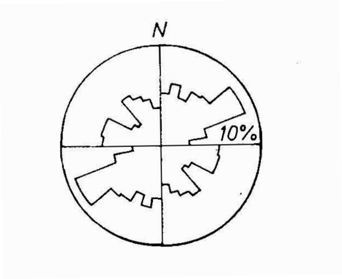
Wenn Φ stationär, kann Λ_Ψ geschrieben werden als:

$$\Lambda_\Psi(B \times L) = L_A \nu_2(B) \mathcal{R}(L)$$

$\mathcal{R}$ ist eine Verteilung auf $\mathcal{B}((0,\pi])$ die sogenannte Richtungsrose.

Richtungsrose/Richtungsverteilung





Schnittpunkte mit Geraden

- Φ stationärer Faserprozess mit Verteilung P, Intensität L_A und Richtungsrose $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{R}((0,\pi]) = 1$
- Betrachte Schnittpunkte von Φ mit x_1-Achse, mit x_1-Achse bezeichnet als e
- Prozess $\Phi \cap e$ ist ein Punktprozess auf e markiert durch die Winkel in den Schnittpunkten
- $\Psi = \{[y_n; w(y_n)]\}$ ist der markierte Punktprozess
- Kenngrößen $\mathcal{R}$ und L_A aus Verteilung von Ψ

Schnittpunkte mit Geraden

- P_L Intensität von Ψ
- H Markenverteilung auf $(0, \pi]$: Verteilung der Schnittwinkel eines typischen Schnittpunktes von $\Psi = \Phi \cap e$
- Zusammenhang zwischen Kenngrößen von Ψ und Φ

$$P_L \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,\pi]} h(z,\alpha)\, H(\mathrm{d}\alpha)\, \mathrm{d}z = L_A \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,\pi]} h(z,\alpha)\, \sin(\alpha) \mathcal{R}(\mathrm{d}\alpha)\, \mathrm{d}z \qquad (1)$$

h ist eine nichtnegative und messbare Funktion auf $\mathbb{R} \times (0, \pi]$

Kenngrößen berechnen

- Verwendung von $h(z,\alpha) = \mathbb{1}_{[0,1]}(z)$ in (1) liefert

$$P_L = L_A \int_{(0,\pi]} \sin(\alpha)\mathcal{R}(\mathrm{d}\alpha). \tag{2}$$

- Verwendung von $h(z,\alpha) = \mathbb{1}_{[0,1]}(z)\mathbb{1}_{(0,\beta]}(\alpha)$ für ein $\beta \in (0,\pi]$ in (1) liefert

$$P_L H((0,\beta]) = L_A \int_{(0,\beta]} \sin(\alpha)\mathcal{R}(\mathrm{d}\alpha). \tag{3}$$

Kenngrößen berechnen

Kombination der beiden letzten Formeln ergibt die Verteilungsfunktion F_H für die Markenverteilung H als

$$F_H(\beta) = H((0,\beta]) = \frac{\int_{(0,\beta]} \sin(\alpha)\mathcal{R}(\mathrm{d}\alpha)}{\int_{(0,\pi]} \sin(\alpha)\mathcal{R}(\mathrm{d}\alpha)}$$

für $0 < \beta \leq \pi$

Kenngrößen berechnen

Sei $\mathcal{R}(\{\pi\}) = 0$ dann lassen sich aus (3) die Kenngrößen von Φ aus denen von Ψ bestimmen:

$$\mathcal{R}((0,\beta]) = \frac{P_L}{L_A} \int_{(0,\beta]} (\sin(\alpha))^{-1} \, H(\mathrm{d}\alpha)$$

setzt man $\beta = \pi$ ergibt sich

$$L_A = P_L \int_{(0,\pi]} (\sin(\alpha))^{-1} \, H(\mathrm{d}\alpha)$$

Schnittpunktrose

- Schnittpunktrose $P_L(\cdot)$
- $P_L(\beta)$ Intensität des Punktprozesses der Schnittpunkte von Φ mit einer Geraden mit Winkel β zu e
- Unter Verwendung von (2) ergibt sich

$$P_L(\beta) = L_A \int_{(0,\pi]} |\sin(\alpha - \beta)| \, \mathcal{R}(\mathrm{d}\alpha)$$

Schnittpunktrose

Falls $\mathcal{R}$ eine stetige Dichte $f_{\mathcal{R}}$ hat kann man die letzte Gleichung differenzieren und erhält

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2} P_L(\beta) + P_L(\beta) = 2 L_A f_{\mathcal{R}}(\beta) \tag{4}$$

Annahmen zur Schätzung

- Daten: Realisierung des stationären Faserprozesses Φ
- Beobachtungen erfolgen in einem kompakten Beobachtungsfenster W

Schätzung der Intensität

$\Phi(W)$ Gesamtlänge aller Fasern in W

erwartungstreuer Schätzer für L_A gegeben durch

$$\hat{L}_A = \frac{\Phi(W)}{\nu_2(W)} = \frac{h_1(\Phi \cap \; W)}{\nu_2(W)}$$

Schätzung der Intensität

Für Φ isotrop ist $\mathcal{R}$ die Gleichverteilung auf $(0, \pi]$. Dann folgt aus (2) die Gleichung

$$L_A = \frac{\pi}{2} P_L$$

$T \subset W$ ein Testsystem von Linien liefert den Schätzer

$$\hat{L}_A^i = \frac{\pi \# \{T \cap \Phi\}}{2 h_1(T)}$$

mit $h_1(T)$ die Gesamtlänge des Liniensystems

Schätzung der Richtungsrose

Formel (4) liefert

$$F_{\mathcal{R}}(\beta) = \frac{1}{2L_A}\left(\frac{\mathrm{d}P_L(\beta)}{\mathrm{d}\beta} + \int_0^\beta P_L(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)$$

Verwende

$$\hat{P}_L(\beta) = \frac{\#\{T^{(\beta)} \cap \Phi\}}{h_1(T^{(\beta)})}$$

mit $T^{(\beta)} \subset W$ Testsystem von Linien, das mit x_1-Achse den Winkel β einschließt

Schätzung der Richtungsrose

Dies ergibt den Schätzer

$$\hat{F}_{\mathcal{R}}(\beta) = \frac{1}{2L_A}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{P}_L(\beta)}{\mathrm{d}\beta} + \int_0^\beta \hat{P}_L(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)$$

$\mathrm{d}\hat{P}_L(\beta)/\mathrm{d}\beta$ ist eine numerische Ableitung von $\hat{P}_L(\beta)$

Methode ist sehr anfällig für Messfehler

Schätzung der Richtungsrose

alternative Methode: $T \subset W$ Testsystem von Kreisen mit Radius R

$$\frac{1}{\#(\Phi \cap T)} \sum_{x \in \Phi \cap T} \mathbb{1}_{(\alpha_1, \alpha_2]}(w(x))$$

Schätzer für $\mathcal{R}((\alpha_1, \alpha_2])$, hier ist $w(x)$ die Richtung der Fasertangente in x

Literatur

Schmidt, V. (2008), *Räumliche Statistik (Vorlesungsskript)*

Stoyan, D., Kendall, W.S., Mecke, J. (1995): *Stochastic Geometry and its Applications*, Wiley

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!