Zufällige Polytope

Benedikt Liedtke

18. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

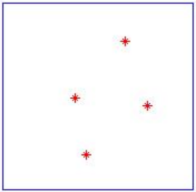
Inhaltsverzeichnis

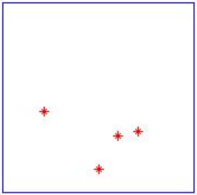
Sylvestersches 4-Punkte Problem (1865)

Sylvester warf 1865 die Frage auf wie hoch die Wahrscheinlichkeit $P(R)$ ist, dass die konvexe Hülle von 4 zufälligen Punkten in einem 2-dimensionalen Bereich R ein Viereck ist. Offensichtlich spielt es eine Rolle, nach welcher Verteilung man die zufälligen Punkte wählt und welche Form die Region R hat.

Sylvestersches 4-Punkte Problem (1865)

Sylvester warf 1865 die Frage auf wie hoch die Wahrscheinlichkeit $P(R)$ ist, dass die konvexe Hülle von 4 zufälligen Punkten in einem 2-dimensionalen Bereich R ein Viereck ist. Offensichtlich spielt es eine Rolle, nach welcher Verteilung man die zufälligen Punkte wählt und welche Form die Region R hat.





Es wurde gezeigt (Blaschke 1923, Peyerimhoff 1997), dass in Abhängigkeit der zugrundeliegenden Menge R gilt:

$$\frac{2}{3} \leq P(R) \leq \frac{35}{12\pi}$$

Der minimale Wert wird angenommen falls R ein Dreieck, der maximale falls R ein Ellipsoid ist.

Die generalisierten Fragestellungen:

- Wahrscheinlichkeit, dass die konvexe Hülle von n+2 Punkten in einem Körper B^n n+1 Ecken hat.

Es wurde gezeigt (Blaschke 1923, Peyerimhoff 1997), dass in Abhängigkeit der zugrundeliegenden Menge R gilt:

$$\frac{2}{3} \leq P(R) \leq \frac{35}{12\pi}$$

Der minimale Wert wird angenommen falls R ein Dreieck, der maximale falls R ein Ellipsoid ist.

Die generalisierten Fragestellungen:

- Wahrscheinlichkeit, dass die konvexe Hülle von n+2 Punkten in einem Körper B^n n+1 Ecken hat.
- erwartete Anzahl von Ecken

Es wurde gezeigt (Blaschke 1923, Peyerimhoff 1997), dass in Abhängigkeit der zugrundeliegenden Menge R gilt:

$$\frac{2}{3} \leq P(R) \leq \frac{35}{12\pi}$$

Der minimale Wert wird angenommen falls R ein Dreieck, der maximale falls R ein Ellipsoid ist.

Die generalisierten Fragestellungen:

- Wahrscheinlichkeit, dass die konvexe Hülle von n+2 Punkten in einem Körper B^n n+1 Ecken hat.
- erwartete Anzahl von Ecken
- erwartetes Volumen der konvexen Hülle.

Definition (konvexe Hülle)

Wir schreiben $[x_1, ..., x_n]$ für die konvexe Hülle der Punktmenge $\{x_1, ..., x_n\}$

Definition (konvexe Hülle)

Wir schreiben $[x_1, ..., x_n]$ für die konvexe Hülle der Punktmenge $\{x_1, ..., x_n\}$

Definition (konvexes Polytop)

Ein konvexes Polytop ist die nichtleere konvexe Hülle von endlich vielen Punkten und somit eine kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^d$

Definition (konvexe Hülle)

Wir schreiben $[x_1, ..., x_n]$ für die konvexe Hülle der Punktmenge $\{x_1, ..., x_n\}$

Definition (konvexes Polytop)

Ein konvexes Polytop ist die nichtleere konvexe Hülle von endlich vielen Punkten und somit eine kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^d$

Definition (zufälliges Polytop)

Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Polytope, dann ist das Bild einer messbaren Abbildung $X : \Omega \to \mathcal{P}$ ein zufälliges Polytop.

- Seien $x_1, ..., x_n$ zufällige Punkte im $\mathbb{R}^d$, dann ist $K = [x_1, ..., x_n]$ ein zufälliges Polytop im $\mathbb{R}^d$

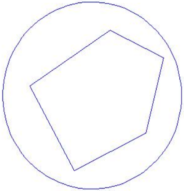
- Seien $x_1, ..., x_n$ zufällige Punkte im $\mathbb{R}^d$, dann ist $K = [x_1, ..., x_n]$ ein zufälliges Polytop im $\mathbb{R}^d$
- Sei $K \subset \mathbb{R}^n, n > d$, dann ist die orthogonale Projektion von K auf einen zufälligen d-dimensionalen Unterraum ein zufälliges Polytop im $\mathbb{R}^d$

- Seien $x_1, ..., x_n$ zufällige Punkte im $\mathbb{R}^d$, dann ist $K = [x_1, ..., x_n]$ ein zufälliges Polytop im $\mathbb{R}^d$
- Sei $K \subset \mathbb{R}^n, n > d$, dann ist die orthogonale Projektion von K auf einen zufälligen d-dimensionalen Unterraum ein zufälliges Polytop im $\mathbb{R}^d$
- Seien $H_1, ..., H_n$ zufällige abgeschlossene Halbräume des $\mathbb{R}^d$, dann kann $K = \bigcap_{i=1,..,n} H_i$ ein zufälliges Polytop im $\mathbb{R}^d$ sein falls es die Definition erfüllt

$\nu(K \setminus K_n)$: das von K_n ausgelassene Volumen

$\nu(K \setminus K_n)$: das von K_n ausgelassene Volumen
und der zugehörige Erwartungswert $\mathbb{E}(\nu(K \setminus K_n)) = \mathbb{E}(K, n)$

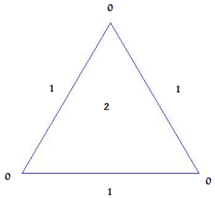
$\nu(K \setminus K_n)$: das von K_n ausgelassene Volumen
und der zugehörige Erwartungswert $\mathbb{E}(\nu(K \setminus K_n)) = \mathbb{E}(K,n)$



$f_k(K_n)$: die Zahl der k-dimensionalen Seiten von K_n

$f_k(K_n)$: die Zahl der k-dimensionalen Seiten von K_n
und deren Erwartungswert: $\mathbb{E}f_k(K_n)$

$f_k(K_n)$: die Zahl der k-dimensionalen Seiten von K_n
und deren Erwartungswert: $\mathbb{E}f_k(K_n)$



- $\mathcal{K} = \mathcal{K}^d := \left\{ K \,\middle|\, K \subset \mathbb{R}^d , K \neq \emptyset, \text{ kompakt und konvex} \right\}$

- $\mathcal{K} = \mathcal{K}^d := \left\{ K \,\middle|\, K \subset \mathbb{R}^d \text{ , } K \neq \emptyset, \text{ kompakt und konvex} \right\}$
- $\mathcal{K}_1 := \left\{ K \in \mathcal{K} \,\middle|\, \nu(K) = 1 \right\}$

- $\mathcal{K} = \mathcal{K}^d := \left\{ K \,\middle|\, K \subset \mathbb{R}^d \text{ , } K \neq \emptyset, \text{ kompakt und konvex} \right\}$
- $\mathcal{K}_1 := \left\{ K \in \mathcal{K} \,\middle|\, \nu(K) = 1 \right\}$
- $K_n := [x_1, ..., x_n],\ x_i \sim \mathcal{U}(K)\ u.i.v,\ K \subset \mathcal{K}$

- $\mathcal{K} = \mathcal{K}^d := \left\{ K \,\middle|\, K \subset \mathbb{R}^d \,, K \neq \emptyset, \text{ kompakt und konvex} \right\}$
- $\mathcal{K}_1 := \left\{ K \in \mathcal{K} \,\middle|\, \nu(K) = 1 \right\}$
- $K_n := [x_1, ..., x_n],\ x_i \sim \mathcal{U}(K)\ u.i.v,\ K \subset \mathcal{K}$
- Halbraum: $H(a \leq t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \langle a, x \rangle \leq t \right\}$ mit $a \in \mathbb{R}^d$ Einheitsvektor und $t \in \mathbb{R}$

- $\mathcal{K} = \mathcal{K}^d := \left\{ K \,\middle|\, K \subset \mathbb{R}^d \,, K \neq \emptyset, \text{ kompakt und konvex} \right\}$
- $\mathcal{K}_1 := \left\{ K \in \mathcal{K} \,\middle|\, \nu(K) = 1 \right\}$
- $K_n := [x_1, ..., x_n], \;\; x_i \sim \mathcal{U}(K) \; u.i.v, \;\; K \subset \mathcal{K}$
- Halbraum: $H(a \leq t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \langle a, x \rangle \leq t \right\}$ mit $a \in \mathbb{R}^d$ Einheitsvektor und $t \in \mathbb{R}$
- $H(a = t)$ die zugehörige begrenzende Hyperebene

- eine **Kappe** C von $K \in \mathcal{K}$ ist eine Menge der Form $C = K \cap H,\ H$ abgeschlossener Halbraum

- eine **Kappe** C von $K \in \mathcal{K}$ ist eine Menge der Form $C = K \cap H,\ H$ abgeschlossener Halbraum
- Wir definieren die Funktion $v : K \to \mathbb{R}$ $v(x) :=\min \left\{ \nu(K \cap H) \,\middle|\, x \in H, H \text{ ist Halbraum} \right\}$

- eine **Kappe** C von $K \in \mathcal{K}$ ist eine Menge der Form $C = K \cap H, \; H$ abgeschlossener Halbraum
- Wir definieren die Funktion $v : K \to \mathbb{R}$ $v(x) :=\min \left\{ \nu(K \cap H) \,\middle|\, x \in H, H \text{ ist Halbraum} \right\}$
- die **minimale Kappe** von $x \in K$ ist eine Kappe $C(x)$ mit $\nu(C(x)) = v(x)$

- eine **Kappe** C von $K \in \mathcal{K}$ ist eine Menge der Form $C = K \cap H, \ H$ abgeschlossener Halbraum
- Wir definieren die Funktion $v : K \to \mathbb{R}$
  $v(x) :=\min \left\{\nu(K \cap H) \,\middle|\, x \in H, H \text{ ist Halbraum}\right\}$
- die **minimale Kappe** von $x \in K$ ist eine Kappe $C(x)$ mit $\nu(C(x)) = v(x)$
- der **floating body** (Niveaumengen) von K ist definiert durch $K(v \geq t) = \left\{x \in K \,\middle|\, v(x) \geq t\right\}$

- eine **Kappe** C von $K \in \mathcal{K}$ ist eine Menge der Form $C = K \cap H,\ H$ abgeschlossener Halbraum
- Wir definieren die Funktion $v : K \to \mathbb{R}$ $v(x) :=\min \left\{ \nu(K \cap H) \,\middle|\, x \in H, H \text{ ist Halbraum} \right\}$
- die **minimale Kappe** von $x \in K$ ist eine Kappe $C(x)$ mit $\nu(C(x)) = v(x)$
- der **floating body** (Niveaumengen) von K ist definiert durch $K(v \geq t) = \left\{ x \in K \,\middle|\, v(x) \geq t \right\}$
- der **wet part** von K mit Parameter $t > 0$ ist $K(t) = K(v \leq t) = \left\{ x \in K \,\middle|\, v(x) \leq t \right\}$

Satz 1:
Es gibt Konstanten $c_0, c_1, c_2 > 0$, sodass $\forall K \in \mathcal{K}_1$ und $n \geq c_0$ gilt:

$$c_1 \nu(K(1/n)) \leq \mathbb{E}(K,n) \leq c_2 \nu(K(1/n))$$

Man kann also anstelle von $\mathbb{E}(K,n)$, das Volumen des wet part von K berechnen und somit das asymptotische Verhalten für $\mathbb{E}(K,n)$ bestimmen.

Sei $x \in K$ fest, $K_n \subset K_1$ zufällig und $C(x)$ minimale Kappe von x.

Sei $x \in K$ fest, $K_n \subset K_1$ zufällig und $C(x)$ minimale Kappe von x. **Lemma 1:**

$$P\{x \notin K_n\} \geq P\{X_n \cap C(x) = \emptyset\} = (1 - v(x))^n$$

wobei X_n eine Stichprobe von n zufälligen Punkten ist.

Sei $x \in K$ fest, $K_n \subset K_1$ zufällig und $C(x)$ minimale Kappe von x. **Lemma 1:**

$$P\{x \notin K_n\} \geq P\{X_n \cap C(x) = \emptyset\} = (1 - v(x))^n$$

wobei X_n eine Stichprobe von n zufälligen Punkten ist.
Mit Lemma 1 erhält man $\forall t > 0$:

$$\mathbb{E}(K, n) \geq (1 - t)^n \nu(K(t))$$

Dies liefert mit $t = 1/n$ und $c_1 = 1/4$ die untere Grenze in Satz 1.

Definition

Zu einem konvexen Körper $K \in \mathcal{K}$ und einen Punkt $x \in K$ ist die zugehörige Macbeath-Region gegeben durch:

$$M(x) = M_K(x) = K \cap (2x - K)$$

Definition

Zu einem konvexen Körper $K \in \mathcal{K}$ und einen Punkt $x \in K$ ist die zugehörige Macbeath-Region gegeben durch:

$$M(x) = M_K(x) = K \cap (2x - K)$$

- $M(x, \lambda) = M_K(x, \lambda) = x + \lambda[(K - x) \cap (x - K)]$

Definition

Zu einem konvexen Körper $K \in \mathcal{K}$ und einen Punkt $x \in K$ ist die zugehörige Macbeath-Region gegeben durch:

$$M(x) = M_K(x) = K \cap (2x - K)$$

- $M(x, \lambda) = M_K(x, \lambda) = x + \lambda[(K - x) \cap (x - K)]$
- $u : K \to \mathbb{R} : \quad u(x) = \nu(M(x))$

Zusammenhang von Kappe und M-Regionen

- Für $x \in K$, $K \in \mathcal{K}_1$ und $v(x) \leq (d2^d)^{-1}$ gilt:
  $C(x) \subset M(x, 2d)$

Zusammenhang von Kappe und M-Regionen

- Für $x \in K$, $K \in \mathcal{K}_1$ und $v(x) \leq (d2^d)^{-1}$ gilt: $C(x) \subset M(x, 2d)$
- außerdem gilt: $M(x) \cap H(a \leq t) \subset C(x) = K \cap H(a \leq t)$

Zusammenhang von Kappe und M-Regionen

- Für $x \in K$, $K \in \mathcal{K}_1$ und $v(x) \leq (d2^d)^{-1}$ gilt: $C(x) \subset M(x, 2d)$
- außerdem gilt: $M(x) \cap H(a \leq t) \subset C(x) = K \cap H(a \leq t)$
- in der Nähe des Randes gilt $v(x) \approx u(x)$

Zusammenhang von Kappe und M-Regionen

- Für $x \in K$, $K \in \mathcal{K}_1$ und $v(x) \leq (d2^d)^{-1}$ gilt: $C(x) \subset M(x, 2d)$
- außerdem gilt: $M(x) \cap H(a \leq t) \subset C(x) = K \cap H(a \leq t)$
- in der Nähe des Randes gilt $v(x) \approx u(x)$
- $M(x)$ lässt sich durch $C(x)$ ersetzen

Als erstes benötigen wir eine obere Grenze für $P\{x \notin K_n\}$:
Lemma 2:

$$P\left\{x \notin K_n\right\} \leq 2\sum_{i=0}^{d-1} \binom{n}{i} \left(\frac{u(x)}{2}\right)^i \left(1 - \frac{u(x)}{2}\right)^{n-i}$$

Als erstes benötigen wir eine obere Grenze für $P\{x \notin K_n\}$:

Lemma 2:

$$P\left\{x \notin K_n\right\} \leq 2 \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n}{i} \left(\frac{u(x)}{2}\right)^i \left(1 - \frac{u(x)}{2}\right)^{n-i}$$

Zum Beweis benötigen wir **Wendels Gleichung**: Sei K ein zu x symmetrischer d-dimensionaler konvexer Körper und X_n eine zufällige Stichprobe mit $x_i \sim \mathcal{U}(K)$ u.i.v dann gilt:

$$P\{x \notin K_n\} = 2^{-n+1} \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n-1}{i}$$

Beweis von Lemma 2:

Sei $x \in K$ fest und definiere $N(x) = K_n \cap M(x)$. Setze $n(x) = |X_n \cap M(x)|$ dann gilt:

$$
\begin{aligned}
P\{x \notin K_n\} &= \sum_{m=0}^{n} P\{x \notin K_n \,|\, n(x) = m\} P\{n(x) = m\} \\
&\leq \sum_{m=0}^{n} P\{x \notin N(x) \,|\, n(x) = m\} P\{n(x) = m\} \\
&= 2 \sum_{m=0}^{n} 2^{-m} \sum_{i=0}^{d-1} \binom{m-1}{i} P\{n(x) = m\} \\
&\leq 2 \sum_{m=0}^{n} 2^{-m} \sum_{i=0}^{d-1} \binom{m-1}{i} \binom{n}{m} u^m (1-u)^{n-m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{x \notin K_n\} &= 2\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{m=0}^{n}\binom{m-1}{i}\binom{n}{m}(\frac{u}{2})^m(1-u)^{n-m} \\
&\leq 2\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{m=i+1}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{m}(\frac{u}{2})^m(1-u)^{n-m} \\
&= 2\sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}\sum_{m=i}^{n}\binom{n-i}{m-i}(\frac{u}{2})^m(1-u)^{n-m} \\
&= 2\sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n-i}{k}(\frac{u}{2})^{k+i}(1-u)^{n-i-k} \\
&= 2\sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}(\frac{u}{2})^i(1-\frac{u}{2})^{n-i}
\end{aligned}
$$

$\square$

Somit erhält man für die obere Grenze:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(K,n) &= \int_K P\{x \notin K\}dx \\ &\leq 2\sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}\int_K (\frac{u(x)}{2})^i(1-\frac{u(x)}{2})^{n-i}\end{aligned}$$

Daraus folgt die obere Grenze, deren Beweis (Barany,Larmann, 1988) hier aber zu weit geht.

Beispiel 1: Einheitskugel B^2 im $\mathbb{R}^2$

Der wet part $B^2(v \leq t)$ ist der Ring $B^2 \setminus (1-h)B^2$ wobei h vom Grad $t^{2/(2+1)}$ ist

$$\mathbb{E}(B^2, n) \approx \nu(B^2(1/n)) \approx n^{-2/(2+1)}$$

Beispiel 1: Einheitskugel B^2 im $\mathbb{R}^2$

Der wet part $B^2(v \leq t)$ ist der Ring $B^2 \setminus (1-h)B^2$ wobei h vom Grad $t^{2/(2+1)}$ ist

$$\mathbb{E}(B^2,n) \approx \nu(B^2(1/n)) \approx n^{-2/(2+1)}$$

Beispiel 2: Einheitsquadrat Q^2 im $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{E}(Q^2,n) \approx \frac{(ln(n))^{2-1}}{n}$$

Satz 2: (Efron,1965) $\forall K \in \mathcal{K}_1$ gilt:

$$\mathbb{E}f_0(K_n) = n\mathbb{E}(K, n-1)$$

Somit wird $\mathbb{E}f_0(K_n)$ ebenfalls durch Satz 1 abgeschätzt.
Satz 3: (Barany,1989)
Für genügend große n und $\forall K \in \mathcal{K}_1$ und
$\forall k = 0, 1, ..., d-1\ \exists c_0, c_1, c_2 > 0$ sodass $\forall n > c_0$ gilt:

$$c_1 n\nu(K(1/n)) \leq \mathbb{E}f_k(K_n) \leq c_2 n\nu(K(1/n))$$

Literatur

- R. Schneider, 2008
  Recent Results on Random Polytopes
- I. Barany, 2008
  Random points and lattice points in convex bodies
- Sylvester, 1865
  On a Special Class of Questions on the Theory of Probabilities
- W. Blaschke, 1923
  Vorlesungen über Differentialgeometrie, II. Affine Differentialgeometrie
- N. Peyerimhoff, 1997
  Areas and Intersections in Convex Domains.
- B. Efron, 1965
  The Convex Hull of a Random Set of Points.