Allgemeine Punktprozesse

Björn Kriesche

Seminar Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen
Universität Ulm

19.10.2009

GLIEDERUNG

Ein Punktprozess im $\mathbb{R}^d$ ist eine Zufallsvariable Φ, die Werte im Messraum $[\mathbb{N}, \mathcal{N}]$ annimmt.

$\mathbb{N}$ ist die Familie aller Punktfolgen $\varphi = \{x_n\}$ im $\mathbb{R}^d$ mit den Eigenschaften:

(I) φ ist lokal endlich, d.h. jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ enthält endlich viele Punkte aus φ

(II) φ ist einfach, d.h. $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $x_i, x_j \in \{x_n\}$

$\mathcal{N}$ ist die kleinste σ-Algebra über $\mathbb{N}$, sodass $\varphi \mapsto \varphi(B)$ für jedes beschränkte $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-messbare Abbildung ist.

Es gibt 2 Betrachtungsweisen für einen Punktprozess Φ:

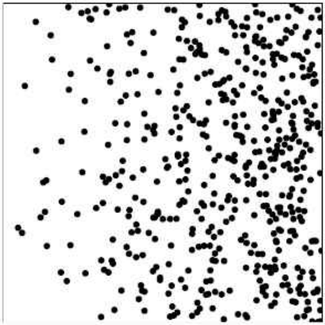
- Φ ist zufällige Menge diskreter Punkte ($x \in \Phi$)
- Φ ist zufälliges Zählmaß ($\Phi(B) = n$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$)

Beispiele:

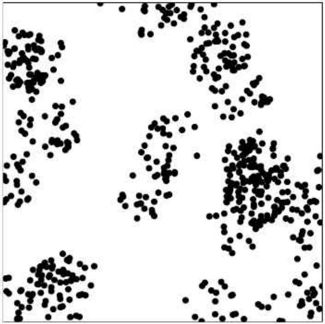
- homogener/inhomogener Poissonprozess
- Cluster-Prozesse, Cox-Prozesse, Gibbs-Prozesse

Beispiele für Anwendungen:

- Biologie: Verteilung von Blumen auf einer Wiese, Zellkulturen
- Astronomie: Verteilung von Sternen
- Physik: Verteilung von Atomen



inhomogener Poisson-Prozess



Matérn-Cluster-Prozess

Die Verteilung $P : \mathcal{N} \to [0,1]$ eines Punktprozesses Φ ist definiert durch

$$P(Y) = \mathbb{P}(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in Y\}) \quad \forall Y \in \mathcal{N}$$

Außerdem interessant:

- endlich-dimensionale Verteilung: $\mathbb{P}(\Phi(B_1) = n_1, \dots, \Phi(B_k) = n_k)$, $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und $n_j \in \mathbb{N}_0$
- Leer-Wahrscheinlichkeiten: $\nu_B = P(\{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B) = 0\}) = \mathbb{P}(\Phi(B) = 0)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Ein Punktprozess Φ heißt stationär, wenn seine Verteilung invariant gegenüber Verschiebung um x ist, d.h.

$$\mathbb{P}(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(\Phi_x \in Y) \;\Leftrightarrow\; P(Y) = P(Y_{-x}) \quad \forall\, Y \in \mathcal{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}^d,$$

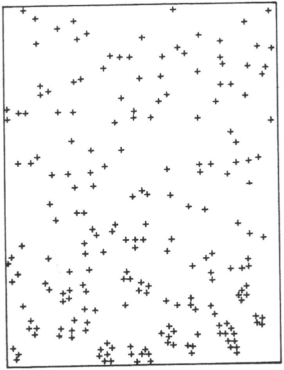
wobei $\Phi = \{x_n\}$, $\Phi_x = \{x_n + x\}$ und $Y_x = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi_{-x} \in Y\}$.

Ein Punktprozess Φ heißt isotrop, wenn seine Verteilung invariant gegenüber Rotation r um den Ursprung ist, d.h.

$$P(Y) = P(rY) \quad \text{wobei } rY = \{\varphi \in \mathbb{N} : r^{-1}\varphi \in Y\},\; Y \in \mathcal{N}.$$

Ein stationärer und isotroper Punktprozess heißt bewegungsinvariant.

Die Verteilung P eines stationären Punktprozesses Φ heißt ergodisch, falls $P(Y) = 0$ oder $P(Y) = 1$ für alle invarianten Mengen $Y \in \mathcal{N}$.
Dabei heißt Y invariant, falls $P(Y \setminus Y_x \cup Y_x \setminus Y) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$.



Beispiel für eine Realisierung als nicht stationärer Punktprozess: Mittelpunkte von Zellkernen aus einer Knorpelgelenkprobe

Das Intensitätsmaß Λ des Punktprozesses Φ ist definiert durch

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}(\Phi(B)) = \int\limits_{\mathbb{N}} \varphi(B) P(d\varphi) \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Ist Φ stationär $\Rightarrow \exists\, \lambda \geq 0 : \Lambda(B) = \lambda \nu_d(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
λ heißt Intensität.
Ist Φ nicht stationär, aber Λ abs.-stetig bzgl. ν_d, d.h.
$\exists\, \lambda(x) : \Lambda(B) = \int\limits_B \lambda(x)\, dx,\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,
dann heißt $\lambda(x)$ Intensitätsfunktion.

Sei Φ ein Punktprozess, $B \subset \mathbb{R}^d$ konvex und kompakt, $o \in B$ und $\nu_d(B) > 0$. Dann heißt $H_B(r) = 1 - \mathbb{P}(\Phi(rB) = 0)$, $r \geq 0$ Kontaktverteilungsfunktion von Φ bezüglich B.

Der Spezialfall $H_S(r) = 1 - \mathbb{P}(\Phi(b(o, r)) = 0)$, $r \geq 0$ heißt sphärische Kontaktverteilungsfunktion.

$H_B(r)$ und $H_S(r)$ sind Verteilungsfunktionen, die Auskunft über die geometrische Beschaffenheit der Leerräume zwischen Punkten des Punktprozesses geben.

Ein Markierter Punktprozess ist eine zufällige Folge $\psi = \{(x_n, m_n)\}$ wobei $\{x_n\}$ ein Punktprozess im $\mathbb{R}^d$ und $\{m_n\}$ eine Folge aus $\mathbb{M}$ (ist ein polnischer Raum, genannt Markenraum) ist.

m_n stellt Marke (bestimmte Charakteristik) zu entsprechendem Punkt x_n dar.
Jeder markierte Punktprozess im $\mathbb{R}^d$ kann man als normalen Punktprozess in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ auffassen.

Beispiele:

- x_n Position eines Baumes, m_n Durchmesser des Stammes
- x_n Position einer Blume auf Wiese, m_n Farbe der Blüte

Das Momentenmaß n-ter Ordnung $\mu^{(n)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd}) \to [0, \infty)$ des Punktprozesses Φ ist definiert durch:

$$\mu^{(n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mathbb{E}(\Phi(B_1) \cdot \ldots \cdot \Phi(B_n)) \qquad B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Spezialfälle:

- $B_1 = \ldots = B_n$: $\mu^{(n)}(B^n) = \mathbb{E}(\Phi(B)^n)$
- $n = 1$: $\mu^{(1)}(B) = \mathbb{E}(\Phi(B)) = \Lambda(B)$

Es besteht enger Zusammenhang zwischen Momentenmaßen $\mu^{(n)}$ und Momenten der Zufallsvariablen $\Phi(B)$.

Das Faktorielle Momentenmaß n-ter Ordnung $\alpha^{(n)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd}) \to [0, \infty)$ des Punktprozesses Φ ist definiert durch:

$$\alpha^{(n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{x_1,\ldots,x_n \in \Phi}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{B_n}(x_n) \right)$$

Spezialfälle:

- $B_1 = \ldots = B_n$:
  $\alpha^{(n)}(B^n) = \mathbb{E}(\Phi(B) \cdot (\Phi(B) - 1) \cdot \ldots \cdot (\Phi(B) - n + 1))$
- $B_1, \ldots, B_n$ paarweise disjunkt:
  $\mu^{(n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \alpha^{(n)}(B_1 \times \cdots \times B_n)$
- $n = 2$: $\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) = \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) + \Lambda(B_1 \cap B_2)$

Sei $\alpha^{(2)}$ lokal endlich und abs.-stetig bezüglich ν_{2d} dann existiert die Produktdichte 2.Ordnung $\rho^{(2)}$:

$$\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) = \int_{B_1}\int_{B_2} \rho^{(2)}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Φ bewegungsinvariant $\Rightarrow$ $\rho^{(2)}(x_1, x_2) = \rho^{(2)}(r)$ hängt nur vom Abstand $r = \|x_1 - x_2\|$ ab

Paarkorrelationsfunktion $g : [0, \infty] \to [0, \infty)$:

$$g(r) = \frac{\rho^{(2)}(r)}{\lambda^2} \qquad \forall r \geq 0$$

Sei $\mathbb{U}$ die Familie aller nicht-negativen, beschränkten Funktionen u mit beschränktem Träger $\{x \in \mathbb{R}^d : u(x) > 0\}$. Sei $\mathbb{V}$ Familie aller Funktionen $v = 1 - u$, für $u \in \mathbb{U}$, $0 \leq u \leq 1$.

Das erzeugende Funktional $G : \mathbb{V} \to [0, 1]$ des Punktprozesses Φ ist definiert durch

$$G(v) = \mathbb{E}\left(\prod_{x \in \Phi} v(x)\right) = \int_{\mathbb{N}} \prod_{x \in \varphi} v(x) P(d\varphi) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

Die Verteilung P von Φ wird eindeutig durch G bestimmt.

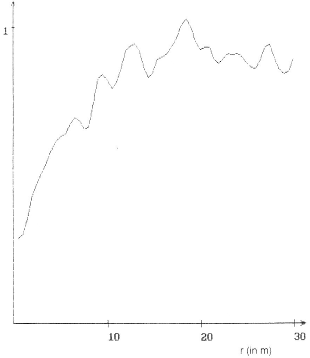
Es gibt einen Zusammenhang zwischen G und der erzeugenden Funktion $G_{\Phi(B)}$ der Zufallsvariablen $\Phi(B)$.

Sei $\Psi = \{(x_n, m_n)\}$ bewegungsinvarianter, markierter Punktprozess mit $\mathbb{M} = \mathbb{R}$. Seine Marken-Korrelationsfunktion k_{mm} ist definiert durch

$$k_{mm}(r) = \frac{E_{o,x} m(o) m(x)}{\overline{m}^2} \qquad \forall r > 0.$$

k_{mm} ist eine Funktion, die die Abhängigkeit der Marken vom Abstand der Punkte des Punktprozesses beschreibt.

Beispiel:Pinien in einem amerikanischem Wald, x_n Positionen der Pinien, m_n Durchmesser der Stämme.



statistisch geschätzte Marken-Korrelationsfunktion des markierten Punktprozesses $\{(x_n, m_n)\}$

Sei Φ ein stationärer Punktprozess mit $0 < \lambda < \infty$.
Die Palmsche-Verteilung im Punkt o ist eine Verteilung auf $[\mathbb{N}, \mathcal{N}]$ definiert durch:

$$P_o(Y) = \int_{\mathbb{N}} \sum_{x \in \varphi \cap B} \frac{\mathbb{1}_Y(\varphi_{-x}) P(d\varphi)}{\lambda \nu_d(B)} \qquad \forall Y \in \mathcal{N},$$

wobei B eine beliebige Borelmenge mit positivem Volumen ist.

Interpretation im ergodischen Fall:
$P_o(Y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffener Punkt $x \in \Phi$ die Eigenschaft $\Phi_{-x} \in Y$ hat.

Manchmal nützlich: reduzierte Palmsche Verteilung $P^!_o$ definiert durch:

$$P^!_o(Y) = P(\Phi \setminus \{o\} \in Y || o) \qquad \forall Y \in \mathcal{N}$$

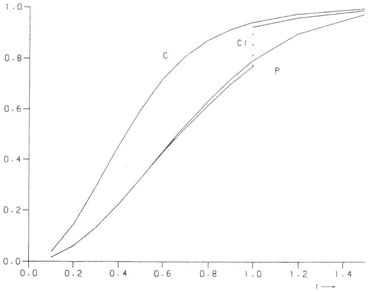
Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion D:

$$\begin{aligned} D(r) &= 1 - P_o(\{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(b(o,r)) = 1\}) \\ &= 1 - P^!_o(\{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(b(o,r)) = 0\}) \quad r \geq 0 \end{aligned}$$

Interpretation im ergodischen Fall: Verteilungsfunktion des Abstands eines zufälligen x_i zum nächsten x_j, $i \neq j$.

J-Funktion $J(r) = \frac{1-D(r)}{1-H_s(r)}$,$r \geq 0$

ANWENDUNGEN DER PALMSCHEN VERTEILUNG



Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion eines Poisson-Prozesses P, eines Cluster-Prozesses Cl und eines Cox-Prozesses C

LITERATUR

- D. Stoyan, W.S. Kendall, J, Mecke:
  Stochastik Geometry and its Applications
- V. Schmidt: Vorlesungsskript räumliche Statistik

Bilder:

- D. Stoyan, W.S. Kendall, J, Mecke:
  Stochastik Geometry and its Applications
  Seiten 103, 115, 122
- V. Schmidt: Vorlesungsskript räumliche Statistik
  Seiten 11, 42