# Innere Volumina und Integralgeometrie

Seminar “Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen"

Christian Bach

19. November 2009

# Inhaltsverzeichnis

# Spiegelung\Translation

- Spiegelung: $\check{A} = -A = \{-x : x \in A\}$ für A $\subset \mathbb{R}^d$

# Spiegelung\Translation

- Spiegelung: $\check{A} = -A = \{-x : x \in A\}$ für A $\subset \mathbb{R}^d$

  Spezialfall: $A = \check{A}$ A ist symmetrisch (zum Ursprung)

# Spiegelung\Translation

- Spiegelung: $\check{A} = -A = \{-x : x \in A\}$ für A $\subset \mathbb{R}^d$
  Spezialfall: $A = \check{A}$ A ist symmetrisch (zum Ursprung)
- Translation: $A_x = A + x = \{y + x : y \in A\}$
  für $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \subset \mathbb{R}^d$

# Minkowski Addition

- Minkowski-Addition:

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

für $A, B \subset \mathbb{R}^d$

# Minkowski Addition

- Minkowski-Addition:

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

  für $A, B \subset \mathbb{R}^d$

- mit

$$A_x = A \oplus \{x\}$$

# Minkowski Addition

- Minkowski-Addition:

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

für $A, B \subset \mathbb{R}^d$

- mit

$$A_x = A \oplus \{x\}$$

- erhält man die Kommutativität

$$A \oplus B = \bigcup_{y \in B} A_y$$

# Minkowski Addition

- Minkowski-Addition:

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

  für $A, B \subset \mathbb{R}^d$

- mit

$$A_x = A \oplus \{x\}$$

- erhält man die Kommutativität

$$A \oplus B = \bigcup_{y \in B} A_y = \bigcup_{x \in A} B_x = B \oplus A$$

# Minkowski Addition

- Außerdem gilt die Assoziativität

# Minkowski Addition

- Außerdem gilt die Assoziativität

$$A \oplus (B_1 \cup B_2) = (A \oplus B_1) \cup (A \oplus B_2)$$

# Minkowski Subtraktion

- Minkowski-Subtraktion:

$$A \ominus B = \bigcap_{y \in B} A_y$$

# Minkowski Subtraktion

- Minkowski-Subtraktion:

$$A \ominus B = \bigcap_{y \in B} A_y$$

oder

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$$

mit Komplementbildung bzgl. des $\mathbb{R}^d$

# Bildoperationen

- Dilatation:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

# Bildoperationen

- Dilatation:
$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$
- Erosion:
$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

# Dilatation

Dilatation:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

# Dilatation

Dilatation:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

Auswirkungen der Dilatation:

# Dilatation

Dilatation:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

Auswirkungen der Dilatation:

- kleine Lücken und Risse werden geschlossen und verschwinden

# Dilatation

Dilatation:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

Auswirkungen der Dilatation:

- kleine Lücken und Risse werden geschlossen und verschwinden
- nahe aneinanderliegende Punkte werden verbunden

# Dilatation

Dilatation:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

Auswirkungen der Dilatation:

- kleine Lücken und Risse werden geschlossen und verschwinden
- nahe aneinanderliegende Punkte werden verbunden
- es werden Punkte an den Ränder hinzugefügt

# Erosion

Erosion:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

# Erosion

Erosion:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Auswirkungen der Erosion:

# Erosion

Erosion:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Auswirkungen der Erosion:

- Objekte an den Rändern werden abgetragen

# Erosion

Erosion:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Auswirkungen der Erosion:

- Objekte an den Rändern werden abgetragen
- Lücken werden größer

# Erosion

Erosion:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Auswirkungen der Erosion:

- Objekte an den Rändern werden abgetragen
- Lücken werden größer
- kleine Objekte verschwinden irreversibel

# Erosion

Erosion:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Auswirkungen der Erosion:

- Objekte an den Rändern werden abgetragen
- Lücken werden größer
- kleine Objekte verschwinden irreversibel
- Objekte können gespaltet werden

# Erosion

Erosion:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Auswirkungen der Erosion:

- Objekte an den Rändern werden abgetragen
- Lücken werden größer
- kleine Objekte verschwinden irreversibel
- Objekte können gespaltet werden

Es gilt:

Dilatation von Objekt $\Leftrightarrow$ Erosion des Hintergrunds

Erosion von Objekt $\Leftrightarrow$ Dilatation des Hintergrunds

# Opening und Closing

- Opening:

$$A \mapsto A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$$

Opening: Erosion + Dilatation

# Opening und Closing

- Opening:

$$A \mapsto A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$$

Opening: Erosion + Dilatation

- Closing:

$$A \mapsto A^B = (A \oplus B) \ominus \check{B}$$

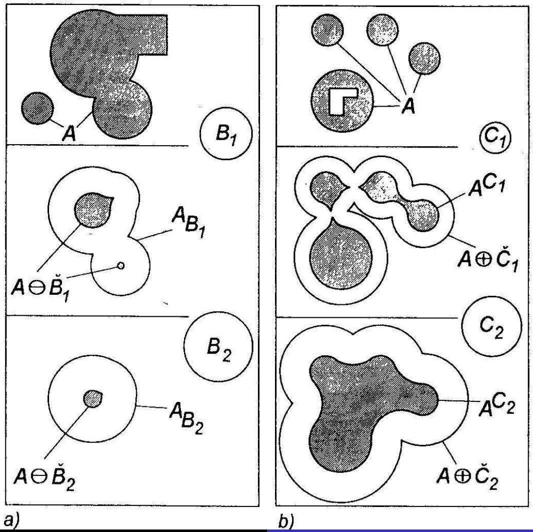
Closing: Dilatation + Erosion

# Zusammenhang Minkowski-Addition und -Subtraktion

Im Allgemeinen ist die Minkowski-Subtraktion nicht die inverse Operation zur Minkowski-Addition. Es gilt jedoch:

$$(A \ominus \check{B}) \oplus B \subseteq A \subseteq (A \oplus \check{B}) \ominus B$$

# Beispiel



# Die Hausdorff-Metrik

- Die Familie $\mathbb{K}'$ nichtleerer, kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ bildet mit der Hausdorff-Metrik einen metrischen Raum:

# Die Hausdorff-Metrik

- Die Familie $\mathbb{K}'$ nichtleerer, kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ bildet mit der Hausdorff-Metrik einen metrischen Raum:

$$h(K_1, K_2) = \inf\{r : K_1 \subset K_2 \oplus b(o,r) \quad \text{und} \quad K_2 \subset K_1 \oplus b(o,r)\}$$

$$\text{für } K_1, K_2 \in \mathbb{K}'$$

# Definition

eine Abbildung

$$\mathbf{m} : x \mapsto x'$$

heißt euklidische Isometrie

$$\Leftrightarrow$$

$$\|x - y\| = \left\|x' - y'\right\| = \|\mathbf{m}x - \mathbf{m}y\|$$

# Darstellung

- jede Isometrie auf einem euklidischen Raum kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\mathbf{m}x = x' = \nu + Ax$$

$$\nu \in \mathbb{R}^d \quad \text{und} \quad \text{Orthogonalmatrix } A$$

# Darstellung

- jede Isometrie auf einem euklidischen Raum kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\mathbf{m}x = x' = \nu + Ax$$

$$\nu \in \mathbb{R}^d \quad \text{und} \quad \text{Orthogonalmatrix } A$$

- echte Isometrie: $det(\mathbf{A}) = 1$
- Spiegelungen sind keine echten Isometrien (da $det(\mathbf{A}) = -1$)

# Grundlagen

- $K \subset \mathbb{R}^d \quad konvex \Leftrightarrow c \cdot x + (1 - c) \cdot y \in K$
  $\forall\ x, y \in K\ \ und\ \ 0 < c < 1$

# Grundlagen

- $K \subset \mathbb{R}^d \quad konvex \Leftrightarrow c \cdot x + (1-c) \cdot y \in K$
  $\forall\ x, y \in K\ \ und\ \ 0 < c < 1$

- konvexe, kompakte Mengen nennt man konvexe Körper

# Grundlagen

- $K \subset \mathbb{R}^d \;\; konvex \Leftrightarrow c \cdot x + (1-c) \cdot y \in K$
  $\forall \; x, y \in K \;\; und \;\; 0 < c < 1$
- konvexe, kompakte Mengen nennt man konvexe Körper
- $b(o, 1)$ bezeichne die d-dimensionale Einheitskugel

# Stützfunktion

- eine wichtige Charakteristik eines konvexen Körpers ist die **Stützfunktion**:

# Stützfunktion

- eine wichtige Charakteristik eines konvexen Körpers ist die **Stützfunktion**:

$$s(K,\cdot): \quad \partial b(o,1) \mapsto \mathbb{R}$$

# Stützfunktion

- eine wichtige Charakteristik eines konvexen Körpers ist die **Stützfunktion**:

$$s(K,\cdot): \quad \partial b(o,1) \mapsto \mathbb{R}$$

- definiert durch

$$s(K,u) = \sup_{x\in K} < u, x >$$

# Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

- ein **Funktional h auf der Menge der konvexen Körper** ist ein reellwertiges Funktional definiert auf $C(\mathbb{K})$:

# Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

- ein **Funktional h auf der Menge der konvexen Körper** ist ein reellwertiges Funktional definiert auf $C(\mathbb{K})$:

$$h : K \mapsto \mathbb{R} \qquad \forall\, K \in C(\mathbb{K})$$

## Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

- ein **Funktional h auf der Menge der konvexen Körper** ist ein reellwertiges Funktional definiert auf $C(\mathbb{K})$:

$$h : K \mapsto \mathbb{R} \qquad \forall\, K \in C(\mathbb{K})$$

- uns interessieren insbesondere nicht negative Funktionale auf konvexen Körpern mit folgenden Eigenschaften:

# Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

- ein **Funktional h auf der Menge der konvexen Körper** ist ein reellwertiges Funktional definiert auf $C(\mathbb{K})$:

$$h : K \mapsto \mathbb{R} \qquad \forall\, K \in C(\mathbb{K})$$

- uns interessieren insbesondere nicht negative Funktionale auf konvexen Körpern mit folgenden Eigenschaften:
  - Isometrie-Invarianz: $h(\mathbf{m}K) = h(K) \;\; \forall K \in C(\mathbb{K})$ und $\mathbf{m}$ eine Isometrie

# Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

- ein **Funktional h auf der Menge der konvexen Körper** ist ein reellwertiges Funktional definiert auf $C(\mathbb{K})$:

$$h : K \mapsto \mathbb{R} \qquad \forall\, K \in C(\mathbb{K})$$

- uns interessieren insbesondere nicht negative Funktionale auf konvexen Körpern mit folgenden Eigenschaften:
  - Isometrie-Invarianz: $h(\mathbf{m}K) = h(K) \;\; \forall K \in C(\mathbb{K})$ und $\mathbf{m}$ eine Isometrie
  - Monotonie: $\qquad K_1 \subset K_2 \Rightarrow h(K_1) \leq h(K_2)$

# Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

- ein **Funktional h auf der Menge der konvexen Körper** ist ein reellwertiges Funktional definiert auf $C(\mathbb{K})$:

$$h : K \mapsto \mathbb{R} \qquad \forall\, K \in C(\mathbb{K})$$

- uns interessieren insbesondere nicht negative Funktionale auf konvexen Körpern mit folgenden Eigenschaften:
  - Isometrie-Invarianz: $h(\mathbf{m}K) = h(K) \;\; \forall K \in C(\mathbb{K})$ und $\mathbf{m}$ eine Isometrie
  - Monotonie: $K_1 \subset K_2 \Rightarrow h(K_1) \leq h(K_2)$
  - C-Additivität: $h(K_1) + h(K_2) = h(K_1 \cup K_2) + h(K_1 \cap K_2)$ für $K_1, K_2 \in C(\mathbb{K})$ *und* $K_1 \cup K_2 \in C(\mathbb{K})$

## Parallelmengen

- eine **Parallelmenge** mit Distanz r einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist die Menge $A \oplus b(o, r)$

# Parallelmengen

- eine **Parallelmenge** mit Distanz r einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist die Menge $A \oplus b(o, r)$

- Folgende Eigenschaften bleiben erhalten:
  - Konvexität
  - Kompaktheit

# Parallelmengen

- eine **Parallelmenge** mit Distanz r einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist die Menge $A \oplus b(o, r)$

- Folgende Eigenschaften bleiben erhalten:
  - Konvexität
  - Kompaktheit

- Im eindimensionalen Fall ergibt sich für das Volumen der Parallelmenge:

$$\nu_1 \left(K \oplus b\left(o, r\right)\right) = l\left(K \oplus b\left(o, r\right)\right) = l\left(K\right) + 2r$$

# Steiner Formel

- die **Steiner-Formel** dient zur Berechnung der inneren Volumina der Parallelmengen

# Steiner Formel

- die **Steiner-Formel** dient zur Berechnung der inneren Volumina der Parallelmengen

$$\nu_d(K \oplus b(o, r)) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} W_k(K) r^k$$

# Steiner Formel

- die **Steiner-Formel** dient zur Berechnung der inneren Volumina der Parallelmengen

$$\nu_d(K \oplus b(o,r)) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} W_k(K) r^k$$

- dabei ist $W_k(K)$ das **Minkowski-Funktional** dieses ist ein bewegungsinvariantes, monotones, C-additives Funktional auf konvexen Körpern

# Minkowski-Funktionale

$$W_k(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{L_k} \nu_{d-k}(p_{S^\perp} K) U_k(dS)$$

# Minkowski-Funktionale

$$W_k(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{L_k} \nu_{d-k}(p_S \perp K) U_k(dS)$$

- $b_d = \frac{\sqrt{\pi^d}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$ Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel

# Minkowski-Funktionale

$$W_k(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{L_k} \nu_{d-k}(p_S \perp K) U_k(dS)$$

- $b_d = \frac{\sqrt{\pi^d}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$ Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel
- $\nu_{d-k}$ (d-k)-dimensionales Lebesgue-Maß

# Minkowski-Funktionale

$$W_k(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{L_k} \nu_{d-k}(p_S \perp K) U_k(dS)$$

- $b_d = \frac{\sqrt{\pi^d}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$ Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel
- $\nu_{d-k}$ (d-k)-dimensionales Lebesgue-Maß
- $L_k$ Menge aller k-Unterräume des $\mathbb{R}^k$

# Minkowski-Funktionale

$$W_k(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{L_k} \nu_{d-k}(p_S \perp K) U_k(dS)$$

- $b_d = \frac{\sqrt{\pi^d}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$ Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel
- $\nu_{d-k}$ (d-k)-dimensionales Lebesgue-Maß
- $L_k$ Menge aller k-Unterräume des $\mathbb{R}^k$
- $p_S \perp K$ orthogonale Projektion von K auf den (d-k)-Unterraum senkrecht zu $S \in L_k$

# Minkowski-Funktionale

$$W_k(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{L_k} \nu_{d-k}(p_S \perp K) U_k(dS)$$

- $b_d = \frac{\sqrt{\pi^d}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$ Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel
- $\nu_{d-k}$ (d-k)-dimensionales Lebesgue-Maß
- $L_k$ Menge aller k-Unterräume des $\mathbb{R}^k$
- $p_S \perp K$ orthogonale Projektion von K auf den (d-k)-Unterraum senkrecht zu $S \in L_k$
- $U_k$ Gleichverteilung auf $L_k$

# Minkowski-Funktionale - Beispiel

$\mathbb{R}^1$ : $W_o(K)$ - Länge von K
$W_1(K) = 1$ (Euler-Charakteristik)

$\mathbb{R}^2$ : $W_o(K)$ - Fläche von K
$2W_1(K)$ - Umfang von K
$\frac{1}{\pi}W_2(K) = 1$ (Euler-Charakteristik)

$\mathbb{R}^3$ : $W_o(K)$ - Volumen von K
$3W_1(K)$ - Oberfläche von K
$\frac{3}{2\pi}W_2(K)$ - mittlere Breite von K
$\frac{3}{4\pi}W_3(K) = 1$ (Euler-Charakteristik)

# Steiner Formel - Beispiel

$$\nu_d(K \oplus b(o,r)) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} W_k(K) r^k$$

- für d=2 ergibt sich somit:

# Steiner Formel - Beispiel

$$\nu_d(K \oplus b(o,r)) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} W_k(K) r^k$$

- für d=2 ergibt sich somit:

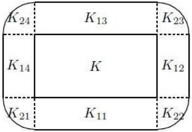
$$A(K \oplus b(o,r)) = A(K) + U(K)r + \pi r^2$$

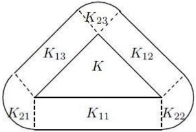
# Steiner Formel - Beispiel

$$\nu_d(K \oplus b(o,r)) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} W_k(K) r^k$$

- für d=2 ergibt sich somit:

$$A(K \oplus b(o,r)) = A(K) + U(K)r + \pi r^2$$



# Innere Volumina

Die Minkowski-Funktionale $W_{d-k}$ sind mit den **inneren Volumina** $V_k$ eng verwandt:

$$b_{d-k} V_k(K) = \binom{d}{k} W_{d-k}(K) \qquad\qquad k = 0, 1, ..., d$$

es gilt:

- $V_d(K)$ Volumen von $K \in C(\mathbb{K})$
- $2V_{d-1}(K)$ Oberfläche von $K \in C(\mathbb{K})$

# Hadwiger Theorem

**Theorem**: Jedes nicht-negative, bewegungsinvariante, monotone, C-additive Funktional **h** auf konvexen Körpern kann wie folgt geschrieben werden:

$$h(K) = \sum_{k=0}^{d} a_k W_k(K)$$

# Definition

Der konvexe Ring $\mathbb{S}$ ist das System aller Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^d$ die als endliche Vereinigung konvexer Körper dargestellt werden kann:

$$\mathbb{S} = \left\{ A : A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \quad \forall K_i \in C(\mathbb{K}) \right\}$$

# Definition

Der konvexe Ring $\mathbb{S}$ ist das System aller Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^d$ die als endliche Vereinigung konvexer Körper dargestellt werden kann:

$$\mathbb{S} = \left\{ A : A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \quad \forall K_i \in C(\mathbb{K}) \right\}$$

$$A_1, A_2 \in \mathbb{S} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathbb{S} \; und \; A_1 \cap A_2 \in \mathbb{S}$$

# additive Funktionale

ein **additives Funktional h** auf $\mathbb{S}$ ist eine Abbildung $h : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}$ mit

# additive Funktionale

ein **additives Funktional h** auf $\mathbb{S}$ ist eine Abbildung $h : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$h(\emptyset) = 0$$

und

$$h(A_1 \cup A_2) + h(A_1 \cap A_2) = h(A_1) + h(A_2)$$

# Euler-Poincaré Charakteristik

Wichtiges Beispiel eines additiven, bewegungsinvarianten Funktionals auf $\mathbb{S}$:
für konvexe nicht-leere Mengen K:

$$\chi(K) = 1$$

# Euler-Poincaré Charakteristik

Für

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \quad \forall K_i \in C(\mathbb{K})$$

# Euler-Poincaré Charakteristik

Für

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \quad \forall K_i \in C(\mathbb{K})$$

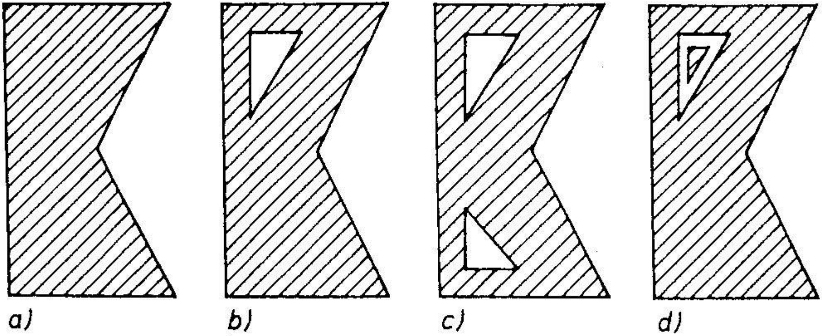
erhält man mit der Additivitätseigenschaft

$$\chi(A) = \sum_{i} \chi(K_i) - \sum_{i_1, i_2; i_1 < i_2} \chi(K_{i_1} \cap K_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-1} \chi(K_1 \cap \ldots \cap K_n)$$

in $\mathbb{R}^2$ : $\chi(A) = \#\{\text{ Flächen }\} - \#\{\text{ Löcher }\}$

# Euler-Poincaré Charakteristik

## Beispiel



# Verallgemeinertes Minkowski-Funktional

Die Euler-Poincaré Charakteristik erlaubt es uns das Minkowski-Funktional auf $\mathbb{S}$ zu verallgemeinern:

$$W_k(A) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{L_k} \int_{S\perp} \chi(K \cap S_s)\nu_{d-k}(ds)U_k(dS)$$

für k=1,...,d

- $\nu_{d-k}(\mathbf{p}_{S\perp}K)$ wurde durch $\int_{S\perp} \chi(K \cap S_s)\nu_{d-k}(ds)$ ersetzt
- $S\perp$ ist die (d-k)-Ebene durch den Ursprung von $\mathbb{R}^d$
- $S\perp$ ist orthogonal zu S und $S_s = S + s$

# Literatur


- Dietrich Stoyan, Wilfried S. Kendall, Joseph Mecke "Stochastic Geometry and its Applications"
- Bernd Jähne, "Digitale Bildverarbeitung", Springer
- Evgueni Spodarev, "Berechnung der Minkowski-Funktionale von deterministischen und zufälligen Mengen"