

Zufällige Tessellationen II :

Komplexere Modelle

David Neuhäuser

Seminar:
"Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen"
Universität Ulm

11.01.2010



Inhalt

- 1 **Wiederholung**
 - Tessellation
 - Zufällige Tessellation
 - k-Facetten
- 2 **Komplexere Modelle**
 - Motivation
 - Iterierte Tessellationen
- 3 **Weitere Iteration und Konvergenz**
 - normierte Superposition
 - normiertes Nesting

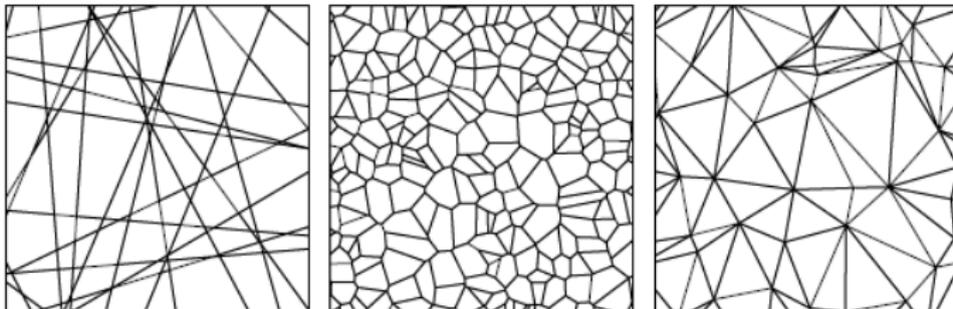


Abbildung: versch. Tessellationen

Tessellation

Eine Tessellation τ im \mathbb{R}^2 ist eine Folge von 2-dimensionalen Polytopen $p_n \in \mathcal{P} = \{p : p \text{ konvexes, kompaktes Polytop}\}$ mit :

Tessellation

Eine Tessellation τ im \mathbb{R}^2 ist eine Folge von 2-dimensionalen Polytopen $p_n \in \mathcal{P} = \{p : p \text{ konvexes, kompaktes Polytop}\}$ mit :

- $\text{int } p_{n_1} \cap \text{int } p_{n_2} = \emptyset \quad \forall n_1 \neq n_2$

Tessellation

Eine Tessellation τ im \mathbb{R}^2 ist eine Folge von 2-dimensionalen Polytopen $p_n \in \mathcal{P} = \{p : p \text{ konvexes, kompaktes Polytop}\}$ mit :

- $\text{int } p_{n_1} \cap \text{int } p_{n_2} = \emptyset \quad \forall n_1 \neq n_2$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n = \mathbb{R}^2$

Tessellation

Eine Tessellation τ im \mathbb{R}^2 ist eine Folge von 2-dimensionalen Polytopen $p_n \in \mathcal{P} = \{p : p \text{ konvexes, kompaktes Polytop}\}$ mit :

- $\text{int } p_{n_1} \cap \text{int } p_{n_2} = \emptyset \quad \forall n_1 \neq n_2$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n = \mathbb{R}^2$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(p_n \cap C \neq \emptyset) < \infty$, C kompakte Menge

Tessellation

Eine Tessellation τ im \mathbb{R}^2 ist eine Folge von 2-dimensionalen Polytopen $p_n \in \mathcal{P} = \{p : p \text{ konvexes, kompaktes Polytop}\}$ mit :

- $\text{int } p_{n_1} \cap \text{int } p_{n_2} = \emptyset \quad \forall n_1 \neq n_2$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n = \mathbb{R}^2$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(p_n \cap C \neq \emptyset) < \infty$, C kompakte Menge

Dabei heißt $p_n \in \tau$ Zelle der Tessellation τ .

Zufällige Tessellation

Sei \mathcal{T} die Familie aller Tessellationen im \mathbb{R}^2 .

Eine Folge $T = \{P_n\}_{n \geq 1}$ von zufälligen Polytopen P_n heißt zufällige Tessellation, falls

$$\mathbb{P}(\{P_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{T}) = 1.$$

Alternative Formulierung: (\rightarrow als markierter Punktprozess)



Alternative Formulierung: (\rightarrow als markierter Punktprozess)

Assoziierter Punkt

\Rightarrow Markenraum notwendig :

$$\mathcal{P}_i = \{P \in \mathcal{P} : c(P) = 0\},$$

wobei $c: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine messbare Abbildung mit $c(P+x) = c(P)+x$
 $\forall P \in \mathcal{P}, x \in \mathbb{R}^2$;

dabei heißt $c(P)$ der zu P assoziierte Punkt

Alternative Schreibweise für eine Tessellation

→ $T = \{P_n\}_{n \geq 1}$ lässt sich schreiben als :

$$X = \left\{ \underbrace{(c(P_n))}_{\in \mathbb{R}^2}, \underbrace{P_n - c(P_n)}_{\in \mathcal{P}_1} \right\}$$

k-Facetten eines Polytops P im \mathbb{R}^2

k-Facetten eines Polytops P im \mathbb{R}^2

- 0-Facetten: Ecken von $P \rightarrow T^{(0)} = \{E_n\}_{n \geq 1}$
Eckenprozess

k-Facetten eines Polytops P im \mathbb{R}^2

- 0-Facetten: Ecken von $P \rightarrow T^{(0)} = \{E_n\}_{n \geq 1}$
Eckenprozess
- 1-Facetten: Kanten von $P \rightarrow T^{(1)} = \{K_n\}_{n \geq 1}$
Kantenprozess

k-Facetten eines Polytops P im \mathbb{R}^2

- 0-Facetten: Ecken von $P \rightarrow T^{(0)} = \{E_n\}_{n \geq 1}$
Eckenprozess
- 1-Facetten: Kanten von $P \rightarrow T^{(1)} = \{K_n\}_{n \geq 1}$
Kantenprozess
- 2-Facetten: Fläche von $P \rightarrow T^{(2)} = \{P_n\}_{n \geq 1}$
Zellenprozess

Inhalt

- 1 Wiederholung
 - Tessellation
 - Zufällige Tessellation
 - k-Facetten
- 2 **Komplexere Modelle**
 - Motivation
 - Iterierte Tessellationen
- 3 Weitere Iteration und Konvergenz
 - normierte Superposition
 - normiertes Nesting

Motivation

Strassensysteme werden durch einfache Modelle wie PVT, PLT oder PDT nicht zufriedenstellend repräsentiert



Motivation

Strassensysteme werden durch einfache Modelle wie PVT, PLT oder PDT nicht zufriedenstellend repräsentiert

- Naturparks, Seen, Flüsse usw. verursachen große Freiflächen in manchen Gebieten

Motivation

Strassensysteme werden durch einfache Modelle wie PVT, PLT oder PDT nicht zufriedenstellend repräsentiert

- Naturparks, Seen, Flüsse usw. verursachen große Freiflächen in manchen Gebieten
- während woanders hingegen z.B. durch Nebenstrassen komplizierte Verästelungen auftreten



Motivation

Strassensysteme werden durch einfache Modelle wie PVT, PLT oder PDT nicht zufriedenstellend repräsentiert

- Naturparks, Seen, Flüsse usw. verursachen große Freiflächen in manchen Gebieten
- während woanders hingegen z.B. durch Nebenstrassen komplizierte Verästelungen auftreten
- "Grenzübergänge" von Städten zu ländlichen Umgebungen

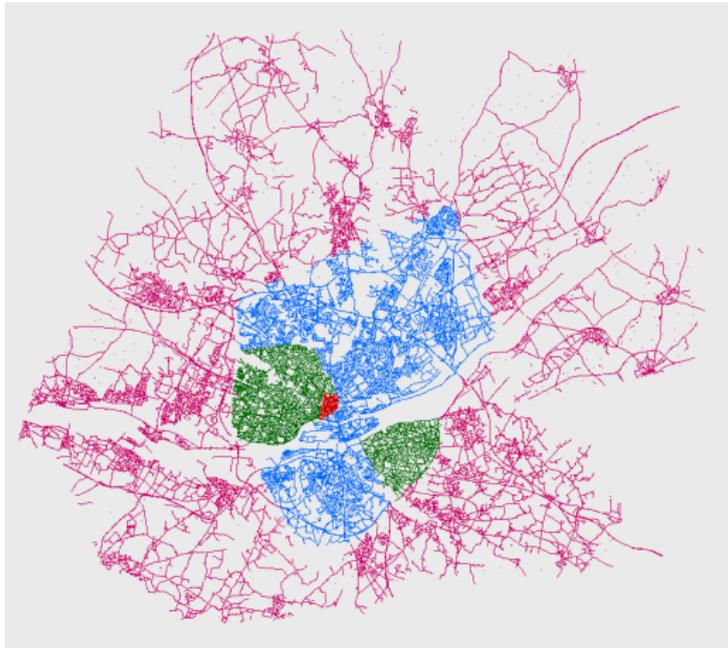


Abbildung: Reales Strassennetz in Nantes

Definition Iterierte Tessellation:

Sei $X_0 = \{P_n\}_{n \geq 1}$, $\{X_n\}_{n \geq 1}$ mit $X_n = \{P_{n,\nu}\}_{\nu \geq 1}$ eine Folge zufälliger Tessellationen. Dann heißt

$$X = \{P_n \cap P_{n,\nu} : \text{int } P_n \cap \text{int } P_{n,\nu} \neq \emptyset\}_{\nu \geq 1, n \geq 1}$$

iterierte zufällige Tessellation mit Ausgangstessellation X_0 und Komponententessellationen $\{X_n\}_{n \geq 1}$.

Definition Iterierte Tessellation:

Sei $X_0 = \{P_n\}_{n \geq 1}$, $\{X_n\}_{n \geq 1}$ mit $X_n = \{P_{n,\nu}\}_{\nu \geq 1}$ eine Folge zufälliger Tessellationen. Dann heißt

$$X = \{P_n \cap P_{n,\nu} : \text{int } P_n \cap \text{int } P_{n,\nu} \neq \emptyset\}_{\nu \geq 1, n \geq 1}$$

iterierte zufällige Tessellation mit Ausgangstessellation X_0 und Komponententessellationen $\{X_n\}_{n \geq 1}$.

Wir untersuchen nun 2 grundlegende Modelle:
Superposition und **Nesting**.

Superposition

Hierfür seien $X_0 = \{P_n\}_{n \geq 1}$, $X_1 = X_2 = X_3 = \dots$ d.h.
 $X_n = X_1 = \{P_{1,\nu}\}_{\nu \geq 1} \forall n = 2, 3, \dots$

Dann heißt

$$X = \{P_n \cap P_{1,\nu} : \text{int } P_n \cap \text{int } P_{1,\nu} \neq \emptyset\}$$

X_0/X_1 Superposition (kurz: $X := \sum(X_0, X_1)$)

Superposition

Hierfür seien $X_0 = \{P_n\}_{n \geq 1}$, $X_1 = X_2 = X_3 = \dots$ d.h.
 $X_n = X_1 = \{P_{1,\nu}\}_{\nu \geq 1} \forall n = 2, 3, \dots$

Dann heißt

$$X = \{P_n \cap P_{1,\nu} : \text{int } P_n \cap \text{int } P_{1,\nu} \neq \emptyset\}$$

X_0/X_1 Superposition (kurz: $X := \sum(X_0, X_1)$)

Interpretation:

Einfaches Übereinanderlegen von X_0 und X_1 .

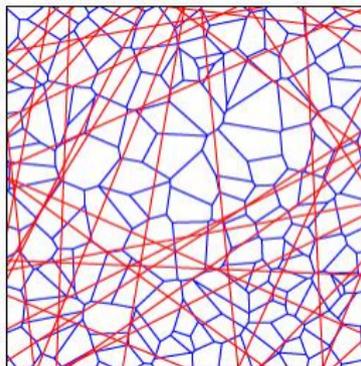


Abbildung: Superposition von PLT und PVT

Nesting

Seien X_0, X_1, X_2, \dots iid. Dann heißt

$$X := I(X_0, \mathcal{X}) := \{P_n \cap P_{n,\nu} : \text{int } P_n \cap \text{int } P_{n,\nu} \neq \emptyset\}_{\nu \geq 1, n \geq 1}$$

X_0/X_1 Nesting. Dabei ist $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots\}$

Nesting

Seien X_0, X_1, X_2, \dots iid. Dann heißt

$$X := I(X_0, \mathcal{X}) := \{P_n \cap P_{n,\nu} : \text{int } P_n \cap \text{int } P_{n,\nu} \neq \emptyset\}_{\nu \geq 1, n \geq 1}$$

X_0/X_1 Nesting. Dabei ist $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots\}$

Interpretation:

Jede Zelle von X_0 wird folgendermaßen weiter unterteilt:
die erste durch X_1 , die zweite durch X_2 , usw.

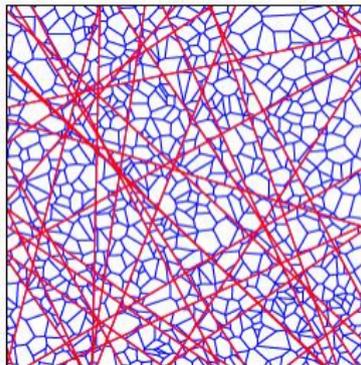


Abbildung: PLT/PVT Nesting

Rückblick Anfang Kapitel 2: "Löcher"



Rückblick Anfang Kapitel 2: "Löcher"

→ Ausweg: Bernoulli-Thinning bei Nesting



Rückblick Anfang Kapitel 2: "Löcher"

→ Ausweg: Bernoulli-Thinning bei Nesting

Bernoulli-Thinning bei Nesting

Idee: Iteriere nur manche Zellen von X_0 .

Rückblick Anfang Kapitel 2: "Löcher"

→ Ausweg: Bernoulli-Thinning bei Nesting

Bernoulli-Thinning bei Nesting

Idee: Iteriere nur manche Zellen von X_0 .

Seien $M_1, M_2, \dots: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ iid und unabhängig von X_0, X_1, X_2, \dots

Betrachte nun

$$\mathbb{P}(M_n = 1) = p \text{ bzw. } \mathbb{P}(M_n = 0) = 1 - p$$

als Füll- bzw. Löschwahrscheinlichkeiten.

Rückblick Anfang Kapitel 2: "Löcher"

→ Ausweg: Bernoulli-Thinning bei Nesting

Bernoulli-Thinning bei Nesting

Idee: Iteriere nur manche Zellen von X_0 .

Seien $M_1, M_2, \dots: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ iid und unabhängig von X_0, X_1, X_2, \dots

Betrachte nun

$$\mathbb{P}(M_n = 1) = p \text{ bzw. } \mathbb{P}(M_n = 0) = 1 - p$$

als Füll- bzw. Löschwahrscheinlichkeiten.

Bemerkung: Falls $p = 1 \Rightarrow$ Ausgangs-Nesting



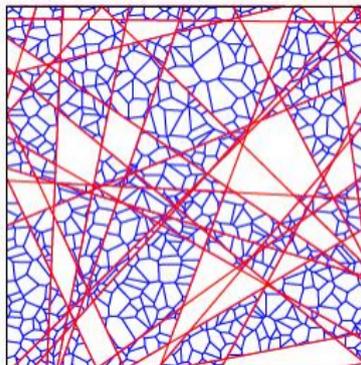


Abbildung: Bernoulli-Thinning bei PLT/PVT mit $p = 0.75$

Theorem

Sei X eine iterierte, zufällige Tessellation mit X_0 als Ausgangstessellation und $\{X_n\}$ als Komponententessellationen. Ferner seien X_0, X_1, X_2, \dots iid und stationär (isotrop). Dann ist X stationär (isotrop).

Theorem

Sei X eine iterierte, zufällige Tessellation mit X_0 als Ausgangstessellation und $\{X_n\}$ als Komponententessellationen. Ferner seien X_0, X_1, X_2, \dots iid und stationär (isotrop). Dann ist X stationär (isotrop).

Annahme:

Wir setzen ab sofort voraus, dass X_0, X_1, X_2, \dots

Theorem

Sei X eine iterierte, zufällige Tessellation mit X_0 als Ausgangstessellation und $\{X_n\}$ als Komponententessellationen. Ferner seien X_0, X_1, X_2, \dots iid und stationär (isotrop). Dann ist X stationär (isotrop).

Annahme:

Wir setzen ab sofort voraus, dass X_0, X_1, X_2, \dots

- stationär und

Theorem

Sei X eine iterierte, zufällige Tessellation mit X_0 als Ausgangstessellation und $\{X_n\}$ als Komponententessellationen. Ferner seien X_0, X_1, X_2, \dots iid und stationär (isotrop). Dann ist X stationär (isotrop).

Annahme:

Wir setzen ab sofort voraus, dass X_0, X_1, X_2, \dots

- stationär und
- isotrop sind.

Facettenintensitäten einer IRT:

Sei im Folgenden:



Facettenintensitäten einer IRT:

Sei im Folgenden:

- $\lambda_i^{(0)}$ die jeweilige Eckenintensität,



Facettenintensitäten einer IRT:

Sei im Folgenden:

- $\lambda_i^{(0)}$ die jeweilige Eckenintensität,
- $\lambda_i^{(1)}$ die jeweilige Intensität der Kantenmittelpunkte,



Facettenintensitäten einer IRT:

Sei im Folgenden:

- $\lambda_i^{(0)}$ die jeweilige Eckenintensität,
- $\lambda_i^{(1)}$ die jeweilige Intensität der Kantenmittelpunkte,
- $\lambda_i^{(2)}$ die jeweilige Intensität der Zellenschwerpunkte und



Facettenintensitäten einer IRT:

Sei im Folgenden:

- $\lambda_i^{(0)}$ die jeweilige Eckenintensität,
- $\lambda_i^{(1)}$ die jeweilige Intensität der Kantenmittelpunkte,
- $\lambda_i^{(2)}$ die jeweilige Intensität der Zellenschwerpunkte und
- $\lambda_i^{(3)} = \lambda_i^{(1)}$ · erwartete Länge der typ. Kante von X_i

wobei $i \in \{0, 1\}$.



Superposition:

$$\lambda^{(0)} = \lambda_0^{(0)} + \lambda_1^{(0)} + \frac{2}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda_0^{(1)} + \lambda_1^{(1)} + \frac{4}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda_0^{(2)} + \lambda_1^{(2)} + \frac{2}{\pi} \lambda_0^{(3)} \lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(3)} = \lambda_0^{(3)} + \lambda_1^{(3)}$$

Nesting mit Bernoulli:

$$\lambda^{(0)} = \lambda_0^{(0)} + p\lambda_1^{(0)} + \frac{4p}{\pi}\lambda_0^{(3)}\lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda_0^{(1)} + p\lambda_1^{(1)} + \frac{6p}{\pi}\lambda_0^{(3)}\lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda_0^{(2)} + p\lambda_1^{(2)} + \frac{2p}{\pi}\lambda_0^{(3)}\lambda_1^{(3)}$$

$$\lambda^{(3)} = \lambda_0^{(3)} + p\lambda_1^{(3)}$$

PLT	$\frac{1}{\pi}\gamma^2$	$\frac{2}{\pi}\gamma^2$	$\frac{1}{\pi}\gamma^2$	γ
PVT	2γ	3γ	γ	$2\sqrt{\gamma}$
PDT	γ	3γ	2γ	$\frac{32}{3\pi}\sqrt{\gamma}$

Abbildung: $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ in Abhängigkeit von γ

PLT/PLT	PLT/PVT	PLT/PDT
$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + \frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + \frac{4}{\pi} p \gamma_0 \gamma_1$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + 2p \gamma_1 + \frac{8}{\pi} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + p \gamma_1 + \frac{128}{3\pi^2} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$
$\frac{2}{\pi} \gamma_0^2 + \frac{2}{\pi} p \gamma_1^2 + \frac{8}{\pi} p \gamma_0 \gamma_1$	$\frac{2}{\pi} \gamma_0^2 + 3p \gamma_1 + \frac{12}{\pi} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$	$\frac{2}{\pi} \gamma_0^2 + 3p \gamma_1 + \frac{64}{3\pi^2} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$
$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + \frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + \frac{2}{\pi} p \gamma_0 \gamma_1$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + p \gamma_1 + \frac{4}{\pi} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + 2p \gamma_1 + \frac{64}{3\pi^2} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$
$\gamma_0 + p \gamma_1$	$\gamma_0 + 2p \sqrt{\gamma_1}$	$\gamma_0 + \frac{32}{3\pi} p \sqrt{\gamma_1}$
PVT/PLT	PVT/PVT	PVT/PDT
$\frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \frac{8}{\pi} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$2(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{16}{\pi} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$	$2\gamma_0 + p \gamma_1 + \frac{256}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
$\frac{2}{\pi} p \gamma_1^2 + 3\gamma_0 + \frac{12}{\pi} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$3(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{24}{\pi} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$	$3(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{128}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
$\frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + \gamma_0 + \frac{4}{\pi} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$\gamma_0 + p \gamma_1 + \frac{8}{\pi} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$	$\gamma_0 + 2p \gamma_1 + \frac{128}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
$p \gamma_1 + 2\sqrt{\gamma_0}$	$2(\sqrt{\gamma_0} + p \sqrt{\gamma_1})$	$2\sqrt{\gamma_0} + \frac{32}{3\pi} p \sqrt{\gamma_1}$
PDT/PLT	PDT/PVT	PDT/PDT
$\frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + \gamma_0 + \frac{128}{3\pi^2} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$2p \gamma_1 + \gamma_0 + \frac{256}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_1 \gamma_0}$	$\gamma_0 + p \gamma_1 + \frac{4096}{9\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
$\frac{2}{\pi} p \gamma_1^2 + 3\gamma_0 + \frac{64}{\pi^2} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$3(p \gamma_1 + \gamma_0) + \frac{128}{\pi^2} p \sqrt{\gamma_1 \gamma_0}$	$3(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{2048}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
$\frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \frac{64}{3\pi^2} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$p \gamma_1 + 2\gamma_0 + \frac{128}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_1 \gamma_0}$	$2(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{2048}{9\pi^2} p \sqrt{\gamma_1 \gamma_0}$
$p \gamma_1 + \frac{32}{3\pi} \sqrt{\gamma_0}$	$2p \sqrt{\gamma_1} + \frac{32}{3\pi} \sqrt{\gamma_0}$	$\frac{32}{3\pi} (\sqrt{\gamma_0} + p \sqrt{\gamma_1})$

Abbildung: $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ in Abhängigkeit von γ_0 und γ_1 bei Nesting

Nun sind wir in der Lage, ein gutes Modell für die Realität zu bilden:



Nun sind wir in der Lage, ein gutes Modell für die Realität zu bilden:

Zur Erinnerung: Jede Tessellation hat einen Vektor

$$\lambda = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})^T.$$



Nun sind wir in der Lage, ein gutes Modell für die Realität zu bilden:

Zur Erinnerung: Jede Tessellation hat einen Vektor

$$\lambda = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})^T.$$

Betrachte nun

$$\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)^T = \frac{1}{|W|} (n_v, n_e, n_c, l_e)^T$$

wobei n_v die Ecken in W , n_e die Kanten in W , n_c die Zellen in W und l_e die totale Kantenlänge in W ist.

- schrittweise durch Spanne von Intensitäten für γ bzw. γ_0 und γ_1 gehen



- schrittweise durch Spanne von Intensitäten für γ bzw. γ_0 und γ_1 gehen
- berechnen der Werte nach der Tabelle

- schrittweise durch Spanne von Intensitäten für γ bzw. γ_0 und γ_1 gehen
- berechnen der Werte nach der Tabelle
- bestimme Vektor im Sinne eines minimalen relativen Abstands

$$d(\lambda, \hat{\lambda}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i - \hat{\lambda}_i}{\lambda_i} \right)^2}$$

(zwischen dem Vektor der geschätzten Intensitäten in der Realität und dem Vektor derer für das Modell)

- schrittweise durch Spanne von Intensitäten für γ bzw. γ_0 und γ_1 gehen
- berechnen der Werte nach der Tabelle
- bestimme Vektor im Sinne eines minimalen relativen Abstands

$$d(\lambda, \hat{\lambda}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i - \hat{\lambda}_i}{\lambda_i} \right)^2}$$

(zwischen dem Vektor der geschätzten Intensitäten in der Realität und dem Vektor derer für das Modell)

- wir erhalten so 3 bzw. 9 verschiedene Vektoren

- schrittweise durch Spanne von Intensitäten für γ bzw. γ_0 und γ_1 gehen
- berechnen der Werte nach der Tabelle
- bestimme Vektor im Sinne eines minimalen relativen Abstands

$$d(\lambda, \hat{\lambda}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i - \hat{\lambda}_i}{\lambda_i} \right)^2}$$

(zwischen dem Vektor der geschätzten Intensitäten in der Realität und dem Vektor derer für das Modell)

- wir erhalten so 3 bzw. 9 verschiedene Vektoren
- wähle darunter dasjenige Tessellationsmodell mit zugehöriger Intensität aus, das unter den minimalen Werten den kleinsten hat

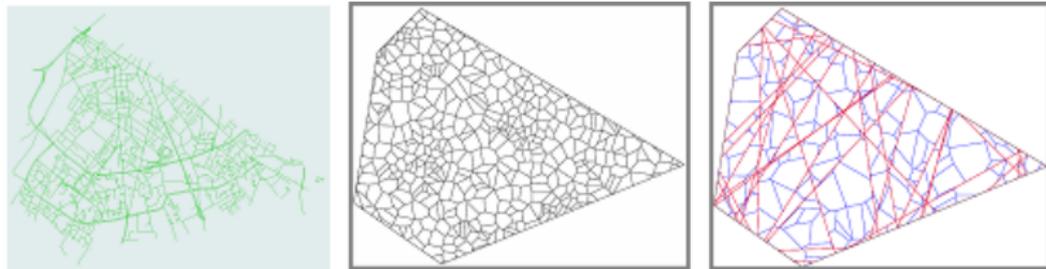


Abbildung: Vergleich: reales Straßennetz (li), simple PVT-Tessellation (mi) und iterierte PLT-PVT Nesting Tessellation (re)

Inhalt

- 1 Wiederholung
 - Tessellation
 - Zufällige Tessellation
 - k-Facetten
- 2 Komplexere Modelle
 - Motivation
 - Iterierte Tessellationen
- 3 Weitere Iteration und Konvergenz
 - normierte Superposition
 - normiertes Nesting

Was passiert, wenn man immer weiter iteriert ? Grenzwerte ?
Art der Konvergenz ?



Was passiert, wenn man immer weiter iteriert ? Grenzwerte ?
Art der Konvergenz ?

Wiederholung Kapazitätsfunktional

$T_X(C) := \mathbb{P}(X^{(1)} \cap C \neq \emptyset)$, C kompakt.

Dabei ist $X^{(1)}$ die Vereinigung aller Kanten von X .

Was passiert, wenn man immer weiter iteriert ? Grenzwerte ?
 Art der Konvergenz ?

Wiederholung Kapazitätsfunktional

$T_X(C) := \mathbb{P}(X^{(1)} \cap C \neq \emptyset)$, C kompakt.

Dabei ist $X^{(1)}$ die Vereinigung aller Kanten von X .

Konvergenz

Sei X, X_1, X_2, \dots eine Folge von stationären Tessellationen im \mathbb{R}^2 . Wir sagen:

$X_n^{(1)} \Rightarrow X^{(1)}$, wenn $T_{X_n}(C) \rightarrow T_X(C) \forall C$ kompakt ($n \rightarrow \infty$)

Intensität bei Superposition von n Tessellationen:

Seien X_0, \dots, X_{n-1} iid und stationär im \mathbb{R}^2 mit Gesamtkantenlänge $\lambda^{(3)}$

Intensität bei Superposition von n Tessellationen:

Seien X_0, \dots, X_{n-1} iid und stationär im \mathbb{R}^2 mit
Gesamtkantenlänge $\lambda^{(3)}$

$\rightarrow \sum(X_0, \dots, X_{n-1})$ ist eine stationäre Tessellation mit
Gesamtkantenlänge $n\lambda^{(3)}$

Intensität bei Superposition von n Tessellationen:

Seien X_0, \dots, X_{n-1} iid und stationär im \mathbb{R}^2 mit
Gesamtkantenlänge $\lambda^{(3)}$

→ $\sum(X_0, \dots, X_{n-1})$ ist eine stationäre Tessellation mit
Gesamtkantenlänge $n\lambda^{(3)}$

⇒ Normierung für konstante Gesamtkantenlängenintensität:

Intensität bei Superposition von n Tessellationen:

Seien X_0, \dots, X_{n-1} iid und stationär im \mathbb{R}^2 mit Gesamtkantenlänge $\lambda^{(3)}$

→ $\sum(X_0, \dots, X_{n-1})$ ist eine stationäre Tessellation mit Gesamtkantenlänge $n\lambda^{(3)}$

⇒ Normierung für konstante Gesamtkantenlängenintensität:

Definition:

$\sum(nX_0, \dots, nX_{n-1})$ heißt normierte Superposition.

Konvergenz-Theorem

Sei X_0, X_1, \dots eine Folge von iid und stationären Tessellationen im \mathbb{R}^2 mit $0 < \lambda^{(1)}, \lambda^{(3)} < \infty$.

Dann gilt:

$$\sum (nX_0, \dots, nX_{n-1}) \Rightarrow \tilde{X}$$

wobei \tilde{X} eine stationäre PLT ist.

Definition Folge normierter Nestings

Sei X_0 eine stationäre Tessellation und sei $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$ eine Folge von Folgen von Tessellationen, sodass alle Tessellationen inkl. X_0 iid.

Dann ist die Folge $l_2(X_0), l_3(X_0), \dots$ von normierten Nestings rekursiv definiert durch :

$$l_2(X_0) = l(2X_0, 2\mathcal{X}_1)$$

$$l_n(X_0) = l(nX_0, n\mathcal{X}_1, \dots, n\mathcal{X}_{n-1})$$

$$= l(l(nX_0, n\mathcal{X}_1, \dots, n\mathcal{X}_{n-2}), n\mathcal{X}_{n-1}), n = 2, 3, \dots$$

Konvergenz

Hier ist lediglich die Existenz einer Grenztessellation bekannt !

Literatur



Roland Maier, Volker Schmidt:

Stationary Iterated Tessellations

Adv. Appl. Prob. (SGSA) 35, 337-353 (2003)



Werner Nagel, Viola Weiss:

Limits of Sequences of Stationary Planar Tessellations

Adv. Appl. Prob. (SGSA) 35, 123-138 (2003)



C. Gloaguen, F. Fleischer, H. Schmidt, V. Schmidt:

Fitting of Stochastic Telecommunication Network Models via Distance Measures and Monte-Carlo Tests, Telecommunication Systems 31

(2006), 353-377



C. Gloaguen, F. Voss, V. Schmidt:

Parametric Distance Distributions for Fixed Access Network Analysis and Planning

Proceedings of the 21st Int. Teletraffic Congress, Paris 2009

