Innere Volumina und Integralgeometrie

Jan-Klaas Halm

16.11.2009

ulm university universität ulm

Grundbegriffe

- $b(o, r)$ bezeichne die Kugel um den Ursprung mit Radius r

Grundbegriffe

- $b(o, r)$ bezeichne die Kugel um den Ursprung mit Radius r
- Spiegelung: $\check{A} = -A = \{-x : x \in A\}$, für $A \subset \mathbb{R}^d$
  falls $\check{A} = A$ heißt A symmetrisch

Grundbegriffe

- $b(o, r)$ bezeichne die Kugel um den Ursprung mit Radius r
- Spiegelung: $\check{A} = -A = \{-x : x \in A\}$, für $A \subset \mathbb{R}^d$
  falls $\check{A} = A$ heißt A symmetrisch
- Translation: $A_x = A + x = \{y + x : y \in A\}$, für $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \subset \mathbb{R}^d$

Minkowski-Addition

Minkowski-Addition:

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

für $A, B \subset \mathbb{R}^d$

Minkowski-Addition

Minkowski-Addition:

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

für $A, B \subset \mathbb{R}^d$

mit $A_x = A \oplus \{x\}$ erhält man die Eigenschaften:

Minkowski-Addition

Minkowski-Addition:

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

für $A, B \subset \mathbb{R}^d$

mit $A_x = A \oplus \{x\}$ erhält man die Eigenschaften:

- Kommutativität: $A \oplus B = \bigcup_{y \in B} A_y = \bigcup_{x \in A} B_x = B \oplus A$

Minkowski-Addition

Minkowski-Addition:

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

für $A, B \subset \mathbb{R}^d$

mit $A_x = A \oplus \{x\}$ erhält man die Eigenschaften:

- Kommutativität: $A \oplus B = \bigcup_{y \in B} A_y = \bigcup_{x \in A} B_x = B \oplus A$
- Assoziativität: $A \oplus (B_1 \cup B_2) = (A \oplus B_1) \cup (A \oplus B_2)$

Minkowski-Subtraktion

Minkowski-Subtraktion:

$$A \ominus B = \bigcap_{y \in B} A_y$$

Minkowski-Subtraktion

Minkowski-Subtraktion:

$$A \ominus B = \bigcap_{y \in B} A_y$$

oder

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$$

mit dem Komplement bzgl. $S = \mathbb{R}^d$

Bildoperationen

- Dilatation der Menge A mit strukturierendem Element B:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

Bildoperationen

- Dilatation der Menge A mit strukturierendem Element B:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

- Erosion der Menge A mit strukturierendem Element B:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Bildoperationen

- Dilatation der Menge A mit strukturierendem Element B:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

- Erosion der Menge A mit strukturierendem Element B:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Diese Formeln definieren die Menge von Punkten x, für die $(B + x)$ A überlappt bzw. in A enthalten ist.

Bildoperationen

- Dilatation der Menge A mit strukturierendem Element B:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

- Erosion der Menge A mit strukturierendem Element B:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Diese Formeln definieren die Menge von Punkten x, für die $(B + x)$ A überlappt bzw. in A enthalten ist.

- Opening: $A \mapsto A_B = \left(A \ominus \check{B}\right) \oplus B$

Bildoperationen

- Dilatation der Menge A mit strukturierendem Element B:

$$A \mapsto A \oplus \check{B}$$

- Erosion der Menge A mit strukturierendem Element B:

$$A \mapsto A \ominus \check{B}$$

Diese Formeln definieren die Menge von Punkten x, für die $(B + x)$ A überlappt bzw. in A enthalten ist.

- Opening: $A \mapsto A_B = \left(A \ominus \check{B}\right) \oplus B$
- Closing: $A \mapsto A^B = \left(A \oplus \check{B}\right) \ominus B$

Zusammenhang Minkowski-Addition und Subtraktion

Im Allgemeinen ist die Minkowski-Subtraktion nicht die inverse Operation zur Minkowski-Addition. Es gilt aber:

$$(A \ominus \check{B}) \oplus B \subseteq A \subseteq (A \oplus \check{B}) \ominus B$$

Beispiel

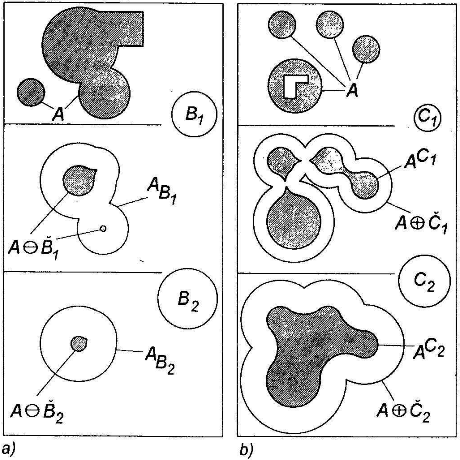

Abbildung: [1, p. 8]

Die Hausdorff-Metrik

Die Familie $\mathbb{K}'$ nichtleerer, kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ bildet mit der Hausdorff-Metrik einen metrischen Raum. Die Hausdorff-Metrik ist wie folgt definiert:

Die Hausdorff-Metrik

Die Familie $\mathbb{K}'$ nichtleerer, kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ bildet mit der Hausdorff-Metrik einen metrischen Raum. Die Hausdorff-Metrik ist wie folgt definiert:

$h(K_1, K_2) = \inf\{r : K_1 \subset K_2 \oplus b(o,r) \, \text{und} \, K_2 \subset K_1 \oplus b(o,r)\}$ für $K_1, K_2 \in \mathbb{K}'$

Euklidische Isometrien

Eine Transformation $\mathbf{m} : x \to x'$ heißt euklidische Isometrie, falls für zwei Punkte x und y gilt: $\|x - y\| = \|x' - y'\| = \|\mathbf{m}x - \mathbf{m}y\|$

Euklidische Isometrien

Eine Transformation $\mathbf{m} : x \to x'$ heißt euklidische Isometrie, falls für zwei Punkte x und y gilt: $\|x - y\| = \|x' - y'\| = \|\mathbf{m}x - \mathbf{m}y\|$

Jede Isometrie im euklidischen Raum kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\mathbf{m}x_k = x'_k = \nu_k + \sum_{l=1}^{d} a_{kl} \cdot x_l$$

für $k = 1, \ldots, d$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d$ und $A = (a_{kl})$ eine orthogonale Matrix ($\Rightarrow \det A = \pm 1$)

Euklidische Isometrien

Eine Transformation $\mathbf{m} : x \to x'$ heißt euklidische Isometrie, falls für zwei Punkte x und y gilt: $\|x - y\| = \|x' - y'\| = \|\mathbf{m}x - \mathbf{m}y\|$

Jede Isometrie im euklidischen Raum kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\mathbf{m}x_k = x'_k = \nu_k + \sum_{l=1}^{d} a_{kl} \cdot x_l$$

für $k = 1, \ldots, d$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d$ und $A = (a_{kl})$ eine orthogonale Matrix ($\Rightarrow \det A = \pm 1$)

Eine Isometrie heißt echte Isometrie, falls $\det A = 1$ gilt

Stützfunktion

Eine wichtige Charakteristik einer kompakten konvexen Menge K (auch konvexer Körper genannt) ist die Stützfunktion:

$$s(K, \cdot) : \partial b(o, 1) \to \mathbb{R}$$

wobei $\partial b(o, 1)$ die Sphäre der Einheitskugel ist

Stützfunktion

Eine wichtige Charakteristik einer kompakten konvexen Menge K (auch konvexer Körper genannt) ist die Stützfunktion:

$$s(K,\cdot) : \partial b(o,1) \to \mathbb{R}$$

wobei $\partial b(o,1)$ die Sphäre der Einheitskugel ist
$s(K,\cdot)$ ist definiert durch:

$$s(K,u) = \sup_{x \in K} \langle u, x \rangle$$

wobei $\langle u, x \rangle = u_1 x_1 + \ldots + u_d x_d$ das euklidische Skalarprodukt von u und x ist

Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

h sei ein reellwertiges Funktional, dass auf der Klasse $C(\mathbb{K})$ (Klasse der kompakte konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$) definiert wird und dass jedem $K \in C(\mathbb{K})$ einen Wert $h(K)$ zuordnet.

Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

h sei ein reellwertiges Funktional, dass auf der Klasse $C(\mathbb{K})$ (Klasse der kompakte konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$) definiert wird und dass jedem $K \in C(\mathbb{K})$ einen Wert $h(K)$ zuordnet.
Von besonderem Interesse sind nichtnegative Funktionale, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

h sei ein reellwertiges Funktional, dass auf der Klasse $C(\mathbb{K})$ (Klasse der kompakte konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$) definiert wird und dass jedem $K \in C(\mathbb{K})$ einen Wert $h(K)$ zuordnet.
Von besonderem Interesse sind nichtnegative Funktionale, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- Isometrieinvarianz: $h(\mathbf{m}K) = h(K)$, falls $K \in C(\mathbb{K})$ und $\mathbf{m}$ ist Isometrie Back

Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

h sei ein reellwertiges Funktional, dass auf der Klasse $C(\mathbb{K})$ (Klasse der kompakte konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$) definiert wird und dass jedem $K \in C(\mathbb{K})$ einen Wert $h(K)$ zuordnet.
Von besonderem Interesse sind nichtnegative Funktionale, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- Isometrieinvarianz: $h(\mathbf{m}K) = h(K)$, falls $K \in C(\mathbb{K})$ und $\mathbf{m}$ ist Isometrie Back
- Monotonie: falls $K_1 \subset K_2$ dann gilt $h(K_1) \leq h(K_2)$

Funktionale auf der Menge der konvexen Körper

h sei ein reellwertiges Funktional, dass auf der Klasse $C(\mathbb{K})$ (Klasse der kompakte konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$) definiert wird und dass jedem $K \in C(\mathbb{K})$ einen Wert $h(K)$ zuordnet.
Von besonderem Interesse sind nichtnegative Funktionale, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- Isometrieinvarianz: $h(\mathbf{m}K) = h(K)$, falls $K \in C(\mathbb{K})$ und $\mathbf{m}$ ist Isometrie Back
- Monotonie: falls $K_1 \subset K_2$ dann gilt $h(K_1) \leq h(K_2)$
- C-Additivität: $h(K_1) + h(K_2) = h(K_1 \cup K_2) + h(K_1 \cap K_2)$ für $K_1, K_2 \in C(\mathbb{K})$, falls $K_1 \cup K_2 \in C(\mathbb{K})$

Parallelmengen

Die Parallelmenge mit dem Abstand r einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist definiert als:

$$A \oplus b(o, r)$$

Parallelmengen

Die Parallelmenge mit dem Abstand r einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist definiert als:

$$A \oplus b(o, r)$$

Beim Bilden der Parallelmenge bleiben folgende Eigenschaften erhalten:

Parallelmengen

Die Parallelmenge mit dem Abstand r einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist definiert als:

$$A \oplus b(o, r)$$

Beim Bilden der Parallelmenge bleiben folgende Eigenschaften erhalten:

- Konvexität

Parallelmengen

Die Parallelmenge mit dem Abstand r einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist definiert als:

$$A \oplus b(o, r)$$

Beim Bilden der Parallelmenge bleiben folgende Eigenschaften erhalten:

- Konvexität
- Kompaktheit

Parallelmengen

Die Parallelmenge mit dem Abstand r einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist definiert als:

$$A \oplus b(o, r)$$

Beim Bilden der Parallelmenge bleiben folgende Eigenschaften erhalten:

- Konvexität
- Kompaktheit

Im Fall $d = 1$ ist das Volumen der Parallelmenge gegeben durch:

$$\nu_1 (K \oplus b(o, r)) = l(K \oplus b(o, r)) = l(K) + 2r$$

Parallelmengen

Die Parallelmenge mit dem Abstand r einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist definiert als:

$$A \oplus b(o, r)$$

Beim Bilden der Parallelmenge bleiben folgende Eigenschaften erhalten:

- Konvexität
- Kompaktheit

Im Fall $d = 1$ ist das Volumen der Parallelmenge gegeben durch:

$$\nu_1 (K \oplus b(o, r)) = l(K \oplus b(o, r)) = l(K) + 2r$$

Im Allgemeinen wird dies durch die **Steiner Formel** beschrieben (eine Herleitung findet sich z.B. in [2, Kapitel 4.2]).

Steiner Formel

Sei $K \in C(\mathbb{K})$, dann ist $\nu_d\left(K \oplus b\left(o, r\right)\right)$ gegeben durch die Steiner Formel:

$$\nu_d\left(K \oplus b\left(o, r\right)\right) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} W_k\left(K\right) r^k$$

wobei $W_k\left(K\right)$ das Minkowskifunktional ist

Beispiel im $\mathbb{R}^2$

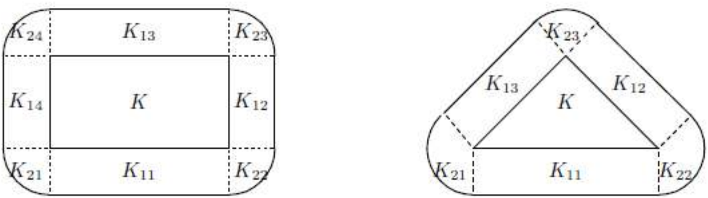

Abbildung: [4, p. 38]

$$A(K \oplus b(o,r)) = A(K) + U(K)\,r + \pi r^2$$

Minkowskifunktional

$$W_k(K) = \left(\frac{b_d}{b_{d-k}}\right) \int_{L_k} \nu_{d-k}(p_S \bot K)\, U_k(dS)$$

Wobei

- $b_l = \frac{\sqrt{\pi^l}}{\Gamma(1+\frac{l}{2})}$ ist das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^l$
- ν_l ist das l-dimensionale Lebesguemaß
- L_l ist die Menge aller l-Unterräume
- $p_S \bot K$ ist die orthogonale Projektion von K auf den $(d-l)$-Unterraum, orthogonal zu $S \in L_l$
- U_l ist die Gleichverteilung auf L_l

Back

Innere Volumina

Die Minkowskifunktionale W_k sind eng verwandt mit den inneren Volumina V_l:

$$b_{d-l} V_l(K) = \binom{d}{l} W_{d-l}(K), \text{ für } l = 0, 1, \ldots, d$$

Hadwiger Theorem

Das Hadwiger Theorem besagt, dass jedes nichtnegative, isometrieinvariante, monotone, C-additive Funktional h in folgender Form geschrieben werden kann:

$$h(K) = \sum_{k=0}^{d} a_k W_k(K)$$

wobei die a_k nichtnegative, von h abhängige Konstanten sind.

Der konvexe Ring

Der konvexe Ring $\mathbb{S}$ ist das System aller $A \subset \mathbb{R}^d$, die als endliche Vereinigung kompakter konvexer Mengen ausgedrückt werden können:

Der konvexe Ring

Der konvexe Ring $\mathbb{S}$ ist das System aller $A \subset \mathbb{R}^d$, die als endliche Vereinigung kompakter konvexer Mengen ausgedrückt werden können:

$$\mathbb{S} = \left\{ A : A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \text{ für } K_i \in C\left(\mathbb{K}\right) \right\}$$

additive Funktionale

Ein additives Funktional h auf $\mathbb{S}$ ist eine Abbildung $h : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

additive Funktionale

Ein additives Funktional h auf $\mathbb{S}$ ist eine Abbildung $h : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- $h(\emptyset) = 0$

additive Funktionale

Ein additives Funktional h auf $\mathbb{S}$ ist eine Abbildung $h : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- $h(\emptyset) = 0$
- $h(A_1 \cup A_2) + h(A_1 \cap A_2) = h(A_1) + h(A_2)$, für $A_1, A_2 \in \mathbb{S}$

additive Funktionale

Ein additives Funktional h auf $\mathbb{S}$ ist eine Abbildung $h : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- $h(\emptyset) = 0$
- $h(A_1 \cup A_2) + h(A_1 \cap A_2) = h(A_1) + h(A_2)$, für $A_1, A_2 \in \mathbb{S}$

Isometrieinvarianz für Funktionale auf $\mathbb{S}$ ist wie bei Funktionalen auf konvexen Körpern definiert. Isometrieinvarianz

Euler Charakteristik

Die Euler Charakteristik χ (auch connectivity number genannt) ist ein wichtiges Beispiel für ein additives, bewegunsinvariantes Funktional auf $\mathbb{S}$.

Euler Charakteristik

Die Euler Charakteristik χ (auch connectivity number genannt) ist ein wichtiges Beispiel für ein additives, bewegunsinvariantes Funktional auf $\mathbb{S}$.

Für K nichtleer und konvex gilt: $\chi(K) = 1$

Euler Charakteristik

Die Euler Charakteristik χ (auch connectivity number genannt) ist ein wichtiges Beispiel für ein additives, bewegunsinvariantes Funktional auf $\mathbb{S}$.

Für K nichtleer und konvex gilt: $\chi(K) = 1$

Für allgemeine $A \in \mathbb{S}$ mit

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \text{ für } K_i \in C(\mathbb{K})$$

erhält man mit der Additivitätseigenschaft:

Euler Charakteristik

Die Euler Charakteristik χ (auch connectivity number genannt) ist ein wichtiges Beispiel für ein additives, bewegunsinvariantes Funktional auf $\mathbb{S}$.

Für K nichtleer und konvex gilt: $\chi(K) = 1$

Für allgemeine $A \in \mathbb{S}$ mit

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \text{ für } K_i \in C\left(\mathbb{K}\right)$$

erhält man mit der Additivitätseigenschaft:

$$\chi\left(A\right) = \sum_{i} \chi\left(K_i\right) - \sum_{i_1, i_2; i_1 < i_2} \chi\left(K_{i_1} \cap K_{i_2}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} \chi\left(K_1 \cap \ldots \cap K_n\right)$$

Beispiel Euler Charakteristik

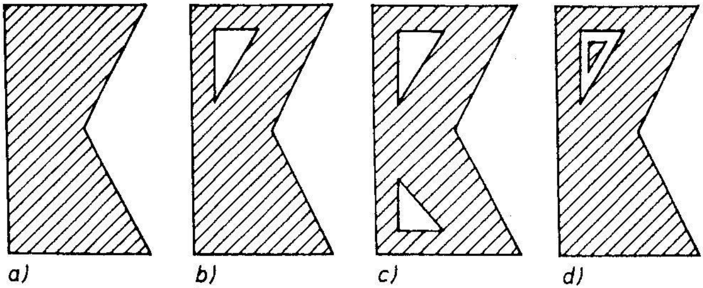

Abbildung: [1, p. 17]

a) Euler Charakteristik: $+1$
b) Euler Charakteristik: 0
c) Euler Charakteristik: -1
d) Euler Charakteristik: $+1$

Verallgemeinertes Minkowski Funktional

Die Euler Charakteristik erlaubt es uns das Minkowski Funktional Minkowski Funktional so zu verallgemeinern, dass es auf $\mathbb{S}$ definiert ist.

Verallgemeinertes Minkowski Funktional

Die Euler Charakteristik erlaubt es uns das Minkowski Funktional ◂ Minkowski Funktional so zu verallgemeinern, dass es auf $\mathbb{S}$ definiert ist.

Man ersetzt den Term $\nu_{d-k}\left(p_{S^\perp}K\right)$ durch

$$\int_{S^\perp} \chi\left(K \cap S_s\right) \nu\left(ds\right)$$

wobei $S^\perp$ die $(d-k)$-Ebene durch den Ursprung des $\mathbb{R}^d$, die orthogonal zu S und $S_s = S + s$ ist, bezeichne

Verallgemeinertes Minkowski Funktional

Man erhält dann für die Minkowski Funktionale:

$$W_k(A) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{L_k} \int_{S^\perp} \chi(K \cap S_s)\, \nu(ds)\, U_k(dS) \text{ für } k = 1, \ldots, d$$

Literatur

Dietrich Stoyan, Wilfrid S. Kendall, Joseph Mecke
Stochastic Geometry and its Applications

Rolf Schneider
Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory

Evgueni Spodarev
Berechnung der Minkowski Funktionale von deterministischen und zufälligen Mengen
http://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/personal/spodarev/publications/wien.pdf

Dr. Theo Overhagen
Konvexgeometrie
http://www.uni-siegen.de/fb6/analysis/overhagen/vorlesungsbeschreibungen/skripte/konvex3.pdf