Markierte Punktprozesse und zufällige Tesselationen

Konstantin Schröck

Seminar Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen

10. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Polnischer Raum

Def.: Sei M ein topologischer Raum. M heißt polnisch, wenn gilt:

- M ist vollständig metrisierbar, d.h. es gibt eine Metrik, die die Topologie von M induziert und bzgl. der alle Cauchy-Folgen konvergieren
- M ist seperabel, d.h. es gibt eine abzählbare Teilmenge, die dicht in M liegt

Beispiele für polnische Räume

- $\mathbb{R}^d \; \forall d \in \mathbb{N}$ mit seiner natürlichen Topologie (von euklidischer Metrik erzeugt)
- $\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie (von diskreter Metrik erzeugt)
- jeder kompakte metrisierbare Raum

Markierte Punktprozesse

- Def.: Sei $\mathbb{M}$ (Markenraum) ein Polnischer Raum. Ein MPP ist ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$, also eine Punktfolge $\Phi := [x_n; m_n]$ für die
$$\#\{(x_n, m_n) \in \Phi : x_n \in B\} < \infty \; \forall B \subset \mathbb{R}^d \text{ beschränkt}$$
gilt.
- $\mathcal{M}$ bezeichnet die σ-Algebra auf $\mathbb{M}$
- intuitiv: jedem Punkt aus Punktprozess wird zufällig eine Markierung zugeordnet

Markierungen können von verschiedener Art sein. Z.B.:

- Erdbebenherde/Stärke oder Ausmaß des Erdbebens
- Zentren von Atomen/Art des Atoms
- Buffonsches Nadelexperiment: Positionen der Nadelmittelpunkte/Winkel zur x-Achse

Bewegungen

- Translation:
  Punkte werden verschoben, Markierungen bleiben unverändert
  $\Phi_x = [x_n + x; m_n]$
  - Stationarität:
    $\forall x \in \mathbb{R}^2$ hat Φ_x gleiche Verteilung wie Φ
- Rotation:
  Punkte werden um Ursprung gedreht, Markierungen bleiben unverändert
  $\mathbf{r}\Phi = [\mathbf{r}x_n; m_n]$
  - Isotropie:
    $\forall x \in \mathbb{R}^2$ hat $\mathbf{r}\Phi$ gleiche Verteilung wie Φ
- Stationarität und Isotropie $\Rightarrow$ Bewegungsinvarianz

Inhaltsverzeichnis

Zählmaß

Das Zählmaß Φ auf $\mathcal{B} \times \mathcal{M}$ ist

$$\Phi(B \times L) = \#\{(x_n, m_n) \in \Phi : x_n \in B, m_n \in L\}$$

für $B \in \mathcal{B}$ und $L \in \mathcal{M}$

Intensitätsmaß I

Das Intensitätsmaß Λ auf $\mathcal{B} \times \mathcal{M}$ ist

$$\Lambda(B \times L) = \mathbb{E}(\Phi(B \times L))$$

für $B \in \mathcal{B}$ und $L \in \mathcal{M}$

Intensitätsmaß II

Sei Φ ein stationärer MPP. Dann gilt:

$$\Lambda(B \times L) := \mathbb{E}(\Phi(B \times L)) = \mathbb{E}(\Phi(B_x \times L)) =: \Lambda(B_x \times L) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$\Rightarrow$ für festes $L \in \mathcal{M}$ ist $\Lambda(\cdot \times L)$ ein translationsinvariantes Maß

Sei zudem Λ ein σ-endliches Maß. Dann folgt:

$$\Lambda(B \times L) = \lambda_L \nu_d(B)$$

λ_L: Intensität von Φ bzgl. L, also durchschnittl. Anzahl von Punkten von Φ pro Volumeneinheit mit Markierungen in L
ν_d: Lebesgue-Maß

Markierungsverteilung

Die Markierungsverteilung M auf $\mathcal{M}$ ist

$$M(L) = \frac{\lambda_L}{\lambda}$$

wobei $\lambda = \lambda_{\mathbb{M}}$ die Intensität des unmarkierten PP ist.

M ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Intensitätsmaß III

Damit gilt für das Intensitätsmaß:

$$\Lambda(B \times L) = \lambda \cdot M(L) \cdot \nu_d(B)$$

Inhaltsverzeichnis

Campbell-Theorem

Sei Φ ein MPP. Dann gilt:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{[x;m]\in\Phi} f(x,m)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{M}} f(x,m)\Lambda(d(x,m))$$

für eine beliebige nicht-negative, messbare Funktion f auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$

Im Folgenden sei nun Φ stets stationär.
Es gilt dann:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{[x;m]\in\Phi} f(x,m)\right) = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{M}} f(x,m)M(dm)dx$$

Spezialfall des Campbell-Theorems

Für ein beliebiges $B \in \mathcal{B}$ mit $\nu_d(B) = 1$ und eine nicht-negative, messbare Funktion h auf $\mathbb{M}$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{[x;m]\in\Phi} \mathbf{1}_B(x)h(m)\right) = \lambda \int_{\mathbb{M}} h(m)M(dm)$$

Anwendung des Campbell-Theorems I

Sei $\mathbb{M} = \mathbb{R}$.

- Markierungsverteilungsfunktion F_M:

$$F_M(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(m) M(dm) = \int_{-\infty}^{x} M(dm)$$

- Durchshnittsmarkierung $\overline{m}$:

$$\overline{m} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_M(x)$$

Anwendung des Campbell-Theorems II

Sei nun $\mathbb{M} = \mathbb{R}_+$.

- Markierungssummenmaß S_m:

$$S_m(B) = \sum_{[x;m]\in\Phi} \mathbf{1}_B(x)m$$

  für $B \in \mathcal{B}$

Mit den obigen Voraussetzungen gilt dann:

$$\mathbb{E}(S_m(B)) = \lambda\overline{m}\nu_d(B)$$

Inhaltsverzeichnis

Definition

Tesselation: Unterteilung einer Fläche in Polygone oder eines Raumes in Polyeder
Beschränkung auf Flächentesselationen ($\mathbb{R}^2$) mit konvexen Polygonen

Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller beschränkten, offenen, konvexen, nicht-leeren Polygone im $\mathbb{R}^2$

- Def.: $\theta \subset \mathbb{P}$ ist Tesselation, wenn gilt:
  (i) $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ für $p_1, p_2 \in \theta$ und $p_1 \neq p_2$
  (ii) $\bigcup\limits_{p \in \theta} \overline{p} = \mathbb{R}^2$
  (iii) B beschränkte Menge $\Rightarrow \{p \in \theta : p \cap B \neq \emptyset\}$ ist endlich

- Zellen: Polygone $p \in \theta$
- Knoten: Ecken der Polygone
- Kanten: Begrenzungen der Polygone zwischen zwei Knoten (enthält keine weiteren Knoten), E_θ ist Vereinigung aller Kanten der Tesselation θ

Tesselation θ erhält man durch Komplementbildung aus ihrer Kantenmenge E_θ:

$$\bigcup_{p \in \theta} p = \mathbb{R}^2 \setminus E_\theta$$

Math. Def. einer zufälligen Tesselation

Sei $\mathbb{T}$ die Menge aller Tesselationen auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{T}$ die σ-Algebra auf $\mathbb{T}$, die von Mengen der Form

$$\{\theta \in \mathbb{T} : E_\theta \cap K \neq \emptyset\}$$

erzeugt wird, wobei K alle kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ durchläuft

- Def.: θ ist Realisierung einer Zufallsvariable Θ mit Werten in $[\mathbb{T}, \mathcal{T}]$
- Verteilung: induziertes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{T}$
  Für $T \in \mathcal{T}$ und $B \subset \Omega$ mit $\Theta(B) = T$ gilt:
  $$P_{\mathbb{T}}(\Theta \in T) = P_\Omega(B)$$

Stationarität und Isotropie

- Stationarität:
  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ hat
  $$\Theta + x = \{p + x : p \in \Theta\} = \{p : p - x \in \Theta\}$$
  die gleiche Verteilung wie Θ
- Isotropie: analog mit Rotationen um Ursprung
- Stationarität und Isotropie $\Rightarrow$ Bewegungsinvarianz

Inhaltsverzeichnis

Voronoi-Tesselation

Sei φ ein lokal endliches System von Punkten im $\mathbb{R}^2$.

Nachbarschaft T(y) von $y \in \varphi$:

$$\mathrm{T(y)}=\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x-y\| < \|x-\tilde{y}\|, \tilde{y} \in \varphi \setminus \{y\}\}$$

Wenn alle T(y) f.s. beschränkt sind, bilden sie die Zellen der Voronoi-Tesselation $\mathcal{V}(\varphi)$ (im $\mathbb{R}^2$ auch Dirichlet-Tesselation genannt).

Sei Φ ein stationärer Punktprozess auf dem $\mathbb{R}^2$ mit Intensität $0 < \lambda < \infty$.

$\Rightarrow$ f.s. alle T(y) mit $y \in \Phi$ sind beschränkt

$\Rightarrow$ Voronoi-Tesselation $\mathcal{V}(\Phi)$

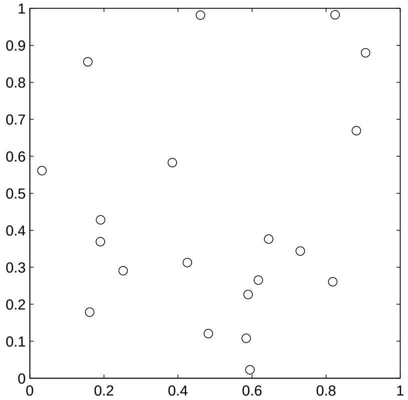

Abbildung: Gleichverteilter Punktprozess

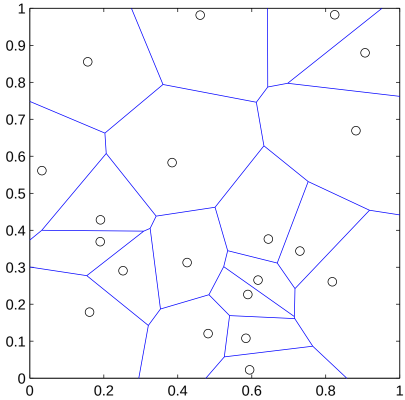

Abbildung: Gleichverteilter Punktprozess mit Voronoi-Tesselation

Interpretation als Wachstumsprozess in Fläche ($\mathbb{R}^2$):

- alle Punkte aus Φ sind Kerne, in denen gleichzeitig Wachstum von Zellen beginnt
- alle Zellen wachsen mit gleicher, gleichbleibender Geschwindigkeit
- Kontakt von Zellen: Wachstum stoppt in Kontaktpunkt
  $\Rightarrow$ es bilden sich Grenzen
- schlussendlich ist ganze Fläche in Zellen unterteilt

Delaunay-Tesselation

Sei eine Voronoi-Tesselation θ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben, deren Knoten alle von genau 3 Zellen berührt werden.
Verbindet man die Zellkerne solcher 3 Zellen, erhält man die Delaunay-Tesselation $\mathcal{D}(\Phi)$.

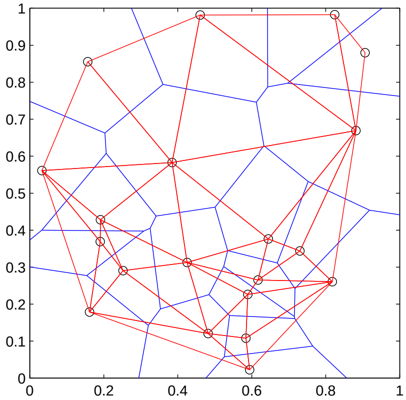

Abbildung: Gleichverteilter Punktprozess mit Voronoi- und Delaunay-Tesselation

Inhaltsverzeichnis

Verallgemeinerte Voronoi-Tesselation $\mathcal{V}_n$

- die Mengen bestehend aus den Punkten aus $\mathbb{R}^d$, die sich die gleichen n nähesten Nachbarn aus Φ teilen, bilden die Zellen
- $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$ ist normale Voronoi-Tesselation

Johnson-Mehl-Modell

- Geburtsprozess erzeugt Kerne, in denen unmittelbar nach der Geburt Wachstum startet
- alle Kerne wachsen mit gleicher Geschwindigkeit
- Kerne, die in Zellen anderer Kerne hinein geboren werden, verschwinden sofort wieder
- alternativ: gleichzeitige Geburt und verschiedene Wachstumsgeschwindigkeiten
- allerdings sind i.A. die Zellen nicht konvex

Anwendung der Voronoi-Tesselation I

Ges.: optimale Anordnung von Briefkästen in einer Region, d.h. minimale(r) Kosten/Aufwand für Nutzer

Sei auf endlichem, abgeschlossenem S$\subset \mathbb{R}^2$ eine Voronoi-Tesselation gegeben mit Zellkernen $x_1, \ldots, x_n \in S$ und zugehörigen Zellen $V_1, \ldots, V_n$.
Sei zudem $\Phi(x)$ die Dichte der Nutzer auf S.

Anwendung der Voronoi-Tesselation II

- Kostenfunktion des Nutzers an Stelle x, um zu x_i zu gelangen:
$$f(\|x - x_i\|^2)$$
- Aufgabenstellung: Minimiere erwarteten Gesamtaufwand der Nutzer
$$F(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} f(\|x - x_i\|^2)\Phi(x)dx$$

Inhaltsverzeichnis

Linien-Tesselation

Sei Ψ ein Linienprozess. Dann lässt sich die Vereinigung aller Linien von Ψ als Kantenvereinigung E_θ auffassen und man erhält eine Tesselation θ.

Crack-Tesselation

Wachstum von Kanten anstatt von Zellen:

- Konstruktion von MPP im $\mathbb{R}^2$, jeder Punkt mit Richtung einer Geraden markiert
- in allen Punkten startet gleichzeitig Wachstum der Geraden mit konstanter Geschwindigkeit
- Wachstum bis andere Gerade getroffen wird

Weitere Methoden zur Konstruktion von Tesselationen

komplizierte Tesselationen können durch Anwendung von Operationen auf einfachere Tesselationen oder durch Kombination obiger Methoden konstruiert werden

- Überlagerung:
  Seien Θ_1, Θ_2 Tesselationen mit Kantenvereinigungen $E_{\Theta_1}, E_{\Theta_2}$
  $E_{\Theta_1} \cup E_{\Theta_2}$ bildet Kantenvereinigung der Überlagerungs-Tesselation
- Iterative Teilung der Zellen:
  jede Zelle wird in weitere Zellen unterteilt durch Anwendung einer der obigen Prozeduren

Literaturangaben

- Stoyan, D., Kendall, W.S., Mecke, J. (1995): Stochastic Geometry and its Applications, Wiley
- Okabe, A., Boots, B. (1992): Spatial tessellations, Wiley

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!