Markierte Punktprozesse und zufällige Tesselationen

Markus Döring

Seminar stochastische Geometrie und ihre Anwendungen

7. Dezember 2009

Gliederung

Gliederung

Polnischer Raum

Ein *polnischer Raum* ist ein metrischer Raum M, der folgende Eigenschaften erfüllt:

- Es gibt eine abzählbare Teilmenge von M, die dicht in M liegt
- M ist vollständig

Beispiele

- Jede endliche Menge ist (mit der diskreten Metrik) ein polnischer Raum.
- $\mathbb{R}$ ist (mit dem Betrag) ein polnischer Raum.
- Wenn $M_1, \ldots, M_n$ polnische Räume mit Metrik $d_1, \ldots, d_n$ sind, dann ist auch ihr kartesisches Produkt $\times_{k=1}^{n} M_k$ ein polnischer Raum mit Metrik $d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, x_n)\right) = \max\{d_i(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n\}$.

Definition: Markierter Punktprozess

Sei $\mathbb{M}$ ein polnischer Raum (sog. *Markenraum*). Einen Punktprozess Ψ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$, der die Eigenschaft

$$\forall B \subset \mathbb{R}^d \text{ beschränkt } : \# \{ (x, m) \in \Psi : x \in \mathcal{B} \} < \infty$$

erfüllt, nennt man *markierten Punktprozess*. Die Borel-σ-Algebra vom $\mathbb{M}$ bezeichnet man mit $\mathcal{M}$.

Beispiele

- Mittelpunkte von Planeten, markiert mit ihrer Masse
- Mittelpunkte von Zellen, markiert mit ihrer Art und ihrem Alter
- Standorte von Servern, markiert mit ihrer Latenzzeit (von einem bestimmten Punkt gemessen)

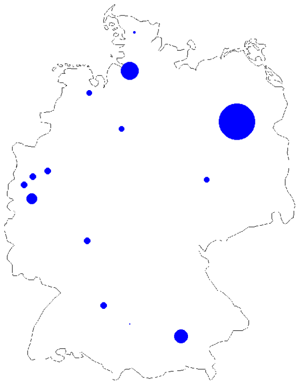

Abbildung: große Städte in Deutschland, markiert mit ihrer Einwohnerzahl

Zufälliges Zählmaß

Auch ein markierter Punktprozess lässt sich als zufälliges Zählmaß auf $\mathcal{B} \otimes \mathcal{M}$ (der Produkt-σ-Algebra von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{M}$) einführen. Sei dazu $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{M}$.

$$\Psi(A) := \#\{(x, m) \in \Psi : (x, m) \in A\}$$

ist ein Maß auf $\mathcal{B} \otimes \mathcal{M}$.

Im folgenden ist von einer euklidischen Bewegung des markierten Punktprozesses die Rede, wenn die Punkte bewegt werden, aber die Marken erhalten bleiben.

Stationarität

Ein markierter Punktprozess ist *stationär*, wenn für alle $v \in \mathbb{R}^d$

$$\Psi_v = \{(x + v, m) : (x, m) \in \Psi\}$$

und Ψ die gleiche Verteilung besitzen.

Bewegungsinvarianz

Ψ ist *isotrop*, wenn für alle Rotationen $\mathbf{r}$ gilt, dass

$$\mathbf{r} \cdot \Psi = \{(\mathbf{r} \cdot x, m) : (x, m) \in \Psi\}$$

und Ψ die gleiche Verteilung besitzen.
Ist ein markierter Punktprozess stationär und isotrop, so nennt man ihn *bewegungsinvariant*.

Gliederung

Intensitätsmaß I

Das Intensitätsmaß Λ eines markierten Punktprozesses ist definiert durch

$$\Lambda(A) = \mathbb{E}\left(\Psi(A)\right)$$

für $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{M}$.

Einschränkung

Für die weiteren Aussagen sei Ψ bewegungsinvariant und Λ ein σ-endliches Maß, also $\mathbb{E}\ (\Psi(A)) < \infty \quad \forall A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{M}$ beschränkt.

Intensität λ_L

Sei $L \in \mathcal{M}$ beliebig, aber fest. Dann ist $\Lambda(\cdot \times L)$ ein bewegungsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}^d$ und es existiert ein $\lambda_L \in \mathbb{R}$ sodass für alle $B \in \mathcal{B}$

$$\Lambda(B \times L) = \lambda_L \nu_d(B),$$

gilt. λ_L bezeichnet man als *Intensität des Punktprozesses bezüglich L*.

Markenverteilung

Sei λ die Intensität des Punktprozesses bezüglich $\mathbb{M}$. Die *Markenverteilung*

$$M(L) = \frac{\lambda_L}{\lambda}, \quad L \in \mathcal{M}$$

ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf ($\mathbb{M}$, $\mathcal{M}$).

Intensitätsmaß II

Seien λ und M wie vorher eingeführt. Dann gilt für das Intensitätsmaß

$$\Lambda = \nu_d \otimes \lambda \cdot M.$$

Markenverteilungsfunktion

Sei $\mathbb{M} = \mathbb{R}$. Die *Markenverteilungsfunktion* ist definiert als

$$F_M(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,x]}(m)\, M(dm) = M\left((-\infty, x]\right).$$

Markenmittel

Darauf aufbauend kann man auch das *Markenmittel*

$$\overline{m} = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} m \, M(dm)$$

angeben.

Gliederung

Campbell-Theorem

Sei Ψ ein markierter Punktprozess und sei $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine nichtnegative, messbare Funktion. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{(x,m)\in\Psi} f(x,m)\right) = \int f(x,m)\Lambda(d(x,m)).$$

(Dies gilt für den allgemeinen Fall, Ψ muss nicht notwendig stationär sein.)

Campbell-Theorem für stationäre MPP

Wenn Ψ stationär ist, lässt sich das Campbelltheorem durch

$$\mathbb{E}\left(\sum_{(x,m)\in\Psi} f(x,m)\right) = \lambda \int\int f(x,m)M(dm)dx$$

ausdrücken.

Anwendung: Markensumme I

Als *Markensumme* auf B bezeichnet man im Fall $\mathbb{M} = \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$S_M(B) = \sum_{(x,m)\in\Psi} \chi_B(x) \cdot m.$$

Anwendung: Markensumme II

Ist Ψ stationär, so gilt für den Erwartungswert der Markensumme von B

$$\mathbb{E}\ (S_M(B)) = \lambda \overline{m} \nu_d(B).$$

Gliederung

Tesselation

- Allgemein: Zerlegung des $\mathbb{R}^d$ in disjunkte Polyeder
- hier: konvexe Polygone im $\mathbb{R}^2$

Definition: Tesselation

Sei $\mathbb{P}$ der Raum aller beschränkten, offenen, konvexen Polygone im $\mathbb{R}^2$ und $\overline{p}$ bezeichne den Abschluss einer Menge p. Ein $\theta \subset \mathbb{P}$ heißt *Tesselation des* $\mathbb{R}^2$, wenn

- $\forall p_1, p_2 \in \theta : p_1 \cap p_2 = \emptyset \text{ falls } p_1 \neq p_2$
- $\bigcup_{p \in \theta} \overline{p} = \mathbb{R}^2$
- $\forall B \subset \mathbb{R}^2 \text{ beschränkt gilt} : \#\{p \in \theta : p \cap B \neq \emptyset\} < \infty$

Die letztgenannte Eigenschaft bezeichnet man als *lokale Endlichkeit*, die Menge aller Tesselationen mit $\mathbb{T}$.

Bemerkung: Punktprozesse

Man kann Tesselationen auch als Spezialfall von markierten Punktprozessen betrachten. Dafür wählt man z.B. $\mathbb{M} = \{p \in \mathbb{P} : \text{Summe der Ecken von } p \text{ ist } 0\}$ und konstruiert einen markierten Punktprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$. Die Punkte aus $\mathbb{R}^d$ entsprechen dann dem Ort, die Marken der Form der Tesselationszellen.

Definition: Zellen, Ecken und Kanten

- Zellen: Polygone aus θ
- Knoten: Ecken der Abschlüsse
- Menge der Kanten: $E_\theta := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{p \in \theta} p$
- Kante: $K \subset E_\theta$ deren Enden Knoten sind und die keine weiteren Knoten enthält

Folgerung

Die Tesselation ist durch die Menge der Kanten eineindeutig bestimmt, da

$$\bigcup_{p\in\theta} p = \mathbb{R}^2 \setminus E_\theta \Leftrightarrow E_\theta = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{p\in\theta} p$$

gilt.

Definition: Zufällige Tesselation

Sei $\mathcal{T} = \sigma\left\{\{\theta \in \mathbb{T} : E_\theta \cap K \neq \emptyset\} : K \subset \mathbb{R}^2 \text{ kompakt}\right\}$.

- *zufällige Tesselation* Θ: Zufallsvariable mit Werten in $(\mathbb{T}, \mathcal{T})$
- Verteilung von Θ: $P_{\mathbb{T}}(\Theta \in T) = P_\Omega(B)$ für $\Theta(B) = T$, $T \in \mathcal{T}$ und $B \subset \Omega$

Definition: Bewegungsinvarianz

Eine zufällige Tesselation heißt *stationär*, falls für alle $A \in \mathcal{T}, x \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$P(\Theta \in A_x) = P(\Theta \in A)$$

Eine zufällige Tesselation heißt analog *isotrop*, wenn ihre Verteilung sich unter Rotation nicht verändert.
Ist Θ stationär und isotrop, so nennt man sie *bewegungsinvariant*.

Gliederung

Definition: Domäne

Als Nachbarschaft oder *Domäne* eines Punkts $x \in \varphi \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnet man

$$T(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \|y - x\| < \|\tilde{y} - \tilde{x}\|, \tilde{x} \in \varphi \setminus \{y\} \right\}.$$

Definition und Satz: Voronoi-Tesselation

Sei $\varphi \neq \emptyset$ eine lokal endliche Menge von Punkten im $\mathbb{R}^2$. Dann nennt man

$$\mathcal{V}(\varphi) = \{T(x) : x \in \varphi\}$$

das *Voronoi-Mosaik* von φ.
Falls alle $T(x)$ beschränkt sind ist das Mosaik eine *Voronoi-Tesselation*.

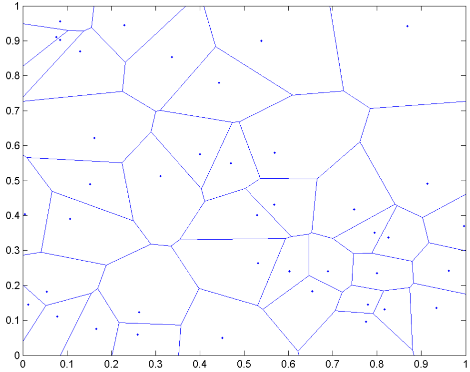

Abbildung: $\mathcal{V}$ eines homogenen Poisson-Punktprozesses

Beispiel: Wachstumsprozess

- Punkte in φ Zellkerne
- zur gleichen Zeit entstanden und mit gleicher Geschwindigkeit wachsend
- Voronoi-Zellen resultieren aus dem Wachstumsprozess

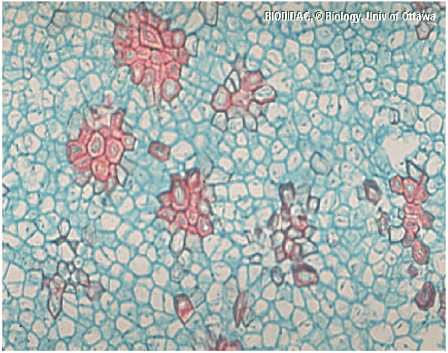

Abbildung: Birnengewebe

Satz: zufällige Voronoi-Tesselation

Ist Φ ein homogener Poisson-Punktprozess mit Intensität $0 < \lambda < \infty$, dann ist $\mathcal{V}(\Phi)$ eine stationäre zufällige Tesselation.

Definition: Delaunay-Tesselation

Sei eine Voronoi-Tesselation gegeben, bei der an jedem Knoten nur 3 Kanten anliegen.
Die Kantenmenge $E_{\ominus}$ der *Delaunay-Tesselation* ist die Menge aller Dreiecke, deren Ecken die Zellkerne an einem gemeinsamen Knoten anliegender Voronoi-zellen sind.

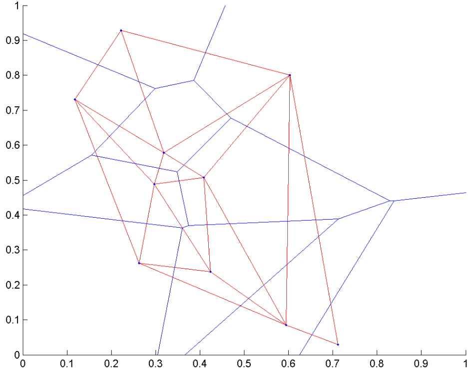

Abbildung: $\mathcal{D}$ (rot) und $\mathcal{V}$ (blau) eines homogenen Poisson-Punktprozesses

Definition: verallgemeinerte Voronoi-Tesselation

Sei

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, x_n) \quad := \quad & \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x_1 - y\|, \dots, \|x_n - y\| < \|x - y\| \\ & \forall x \in \varphi \setminus \{x_1, \dots, x_n\}\} \end{aligned}$$

die Domäne der Punkte $x_1, \dots, x_n$. Dann heißt

$$\mathcal{V}_n(\Phi) := \{T(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \Phi\}$$

die *verallgemeinerte Voronoi-Tesselation* von Φ.

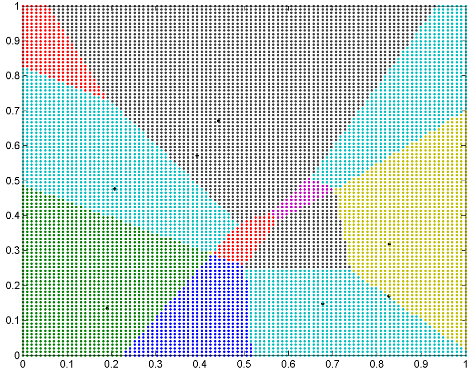

Abbildung: $\mathcal{V}_2$ eines Punktprozesses

Johnson-Mehl-Modell

Erweitertes Modell eines Wachstumsprozesses.
Neu:

- Punkte können zu unterschiedlichen Zeiten entstehen
- oder mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten wachsen
- oder beides

Die daraus resultierenden Zellen sind allerdings nicht mehr notwendig konvex $\Leftrightarrow$ unvereinbar mit dem eingeführten Tesselationsbegriff

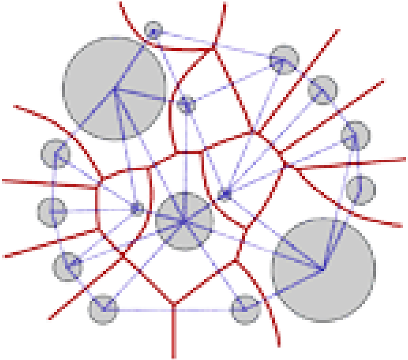

Abbildung: Simulation eines Johnson-Mehl-Modells, der Kreisradius ist proportional zur Wachstumsgeschwindigkeit. Außerdem ist die Delaunay-Tesselation in blau angedeutet.

Anwendungen

(Verallgemeinerte) Voronoi-Tesselationen finden vielseitige Anwendungen in den Naturwissenschaften:

- Analyse von Gesteinszusammensetzungen, speziell deren Querschnitte
- Verteilung der Galaxien im Weltall (evtl. projiziert auf den sichtbaren Himmel)
- Verteilung (und Optimierung) von Service-Stationen (bspw. Supermärkte oder Bushaltestellen)

Gliederung

Riss-Tesselation

Sei Ψ ein markierter Punktprozess mit Marken aus $[0, 2\pi)$.

- von jedem Punkt in Ψ beginnt eine Linie zu wachsen
- Linie hat Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ zur x-Achse
- trifft eine Linie auf eine andere, so stoppt das Wachstum

Linienprozess

Auch ein zufälliger Linienprozess kann als Tesselation aufgefasst werden. Dazu verwendet man die Menge der Linien als Kantenmenge der Tesselation.

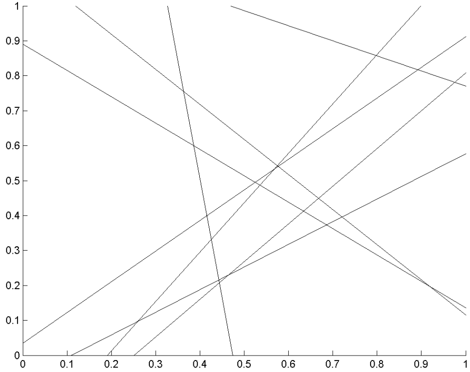

Abbildung: Tesselation aus Linienprozess

Überlagerung

Man kann aus zwei Tesselationen Θ_1 und Θ_2 eine neue Tesselation Θ gewinnen, in dem man sie überlagert.
Die Kantenmenge von Θ ergibt sich durch $E_\Theta = E_{\Theta_1} \cup E_{\Theta_2}$.

Iterative Teilung

Tesseliert man einzelne Zellen einer vorhandenen Tesselation, so erhält man eine neue Tesselation.
z.B.: Riss-Tesselation auf Voronoi-Zellen angewandt. (Hier stoppt das Linienwachstum auch, wenn eine Zellwand erreicht wird)

Ausblick

Zu Voronoi-Tesselationen und verwandten Modellen lassen sich statistische Aussagen treffen:

- mittlere Anzahl Kanten an einem Knoten
- mittlere Anzahl Kanten an einer Zelle
- ...

Dies wird in den nächsten Vorträgen vertieft.
Allgemeine Aussagen zu anderen Tesselationen sind schwieriger zu finden, hier wird in der Regel simuliert, um statistische Kenngrößen zu schätzen.

Quellen

- Stoyan, Kendall, Mecke: *Stochastic geometry and its applications*, Wiley 1995
- Okabe, Boots: *Spatial Tesselations*, Wiley 1992
- Bild *Birnengewebe*: Department of Biology, University of Ottawa
  http://biodidac.bio.uottawa.ca
- Bild *Johnson-Mehl*: Institute of Chemical Kinetics and Combustion, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk
  http://kinetics.nsc.ru

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!