

Simulation von Zufallsvariablen und Punktprozessen

Martin Fuchs

09.11.2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

2 Pseudozufallszahlen

3 Punktprozesse

Zufallszahlen

Definition (Duden): Eine Zufallszahl ist “eine Zahl, die rein statistisch (“zufällig“) aus einer Menge von Zahlen herausgegriffen wird. Eine (unendliche) Folge von Zahlen ohne (algorithmisches) Bildungsgesetz heißt Zufallszahlenfolge.“

- “echte“ Zufallszahlen: physikalische Experimente (Münzwurf, Würfel werfen, kosmisches Rauschen, etc.).

⇒ Pseudozufallszahlen

Zufallszahlen

Anwendung in den unterschiedlichsten Gebieten (Physik, Biologie, Meteorologie, Informatik)

Verfahren, die auf computergenerierten Daten basieren haben wesentliche Vorteile:

- schnell und kostengünstig
- beliebig oft wiederholbar (Beobachtungsobjekt beliebig oft vorhanden)
- numerische Lösung komplexer analytischer Probleme

Berechnung von π

- $E :=$ Einheitskreis im ersten Quadranten
- $A := [0,1] \times [0,1]$
- $u_1, u_2 \sim U([0,1])$.

Dann gilt:

$$P((u_1, u_2) \in E) = P(u_1^2 + u_2^2 \leq 1) = \frac{\text{Fläche von } E}{\text{Fläche von } A} = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow \pi \approx \frac{4 \cdot \text{Anzahl der Punkte in } E}{\text{Anzahl der Punkte in } A}$ für eine große Anzahl an simulierten Punkten.

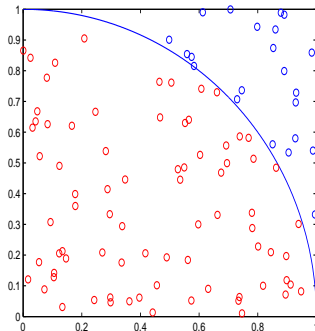
Berechnung von π 

Abbildung: Simulation für 100 Punkte, Ergebnis $\pi \approx 3.12$

Pseudozufallszahlen

Pseudozufallszahlen sind Zahlen, die durch einen deterministischen Algorithmus berechnet werden, aber dennoch zufällig erscheinen.

Gängige Möglichkeiten, Pseudozufallszahlen zu erzeugen sind unter anderem

- Bitfolgen
- linearer/nichtlinearer Kongruenzgenerator
- Inversionsgenerator

Güteeigenschaften von Pseudozufallszahlen

Eine Folge von auf $[0, 1]$ gleichverteilten Pseudozufallszahlen sollte folgende Eigenschaften erfüllen:

- Für jeden Startwert x_0 **gleichmäßige Streuung** der Folgenglieder auf $[0, 1]$
- Für jeden Startwert x_0 **lange Periode** der Folge der Pseudozufallszahlen
- Für jeden Startwert x_0 **effiziente Berechenbarkeit** der Folgenglieder $x_i, i \in \mathbb{N}$

Der lineare Kongruenzgenerator

Sei $m \in \mathbb{N}$, $a, c, x_0 \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$. Dann nennt man

$$x_n = (ax_{n-1} + c) \bmod(m) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

einen **linearen Kongruenzgenerator**.

Offenbar gilt $x_n \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$, und somit bildet x_n , $n \in \mathbb{N}$, eine periodische Folge.

Der lineare Kongruenzgenerator

Die Normierung

$$u_n = \frac{x_n}{m} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

erzeugt die Folge u_n , deren Elemente alle in $[0, 1)$ liegen.

χ^2 -goodness of fit test für gleichverteilte Zufallsvariablen

Dieser Test dient zur Feststellung, ob $\{u_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ auf $[0, 1]$ gleichverteilt sind.

- Zerlege $[0, 1)$ in r gleichlange Teilintervalle $[0, \frac{1}{r}), [\frac{1}{r}, \frac{2}{r}), \dots, [\frac{r-1}{r}, 1)$
- Definiere $p := (p_1, \dots, p_r)$, mit

$$p_j = \frac{\#\{i : u_i \in [\frac{j-1}{r}, \frac{j}{r})\}}{n}, \quad j \in \{1, \dots, r\}$$

■

$$T_n(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^r \frac{(Z_j(u_1, \dots, u_n) - \frac{n}{r})^2}{\frac{n}{r}}$$

wobei $Z_j(u_1, \dots, u_n) = \#\{i : 1 \leq j \leq n, j-1 < ru_i \leq j\}$

Wir lehnen die Hypothese $H_0: \mathbf{p} = \mathbf{p}_o = (\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r})$ also ab, falls

$$T_n > \chi_{r-1, 1-\alpha}^2$$

Inversionsmethode

Sei $U \sim U([0, 1])$. Für jede umkehrbare Verteilungsfunktion F besitzt die Zufallsvariable

$$X = F^{-1}(U)$$

die Verteilungsfunktion F , wobei

$$F^{-1}(u) := \inf\{x : F(x) \geq u\}$$

Beispiel

Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, F die Verteilungsfunktion von X mit

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

und u eine Realisierung von $U \sim U([0,1])$.

Beispiel

Um eine Realisierung x von X zu erhalten, setzen wir u in obiges Lemma ein:

$$x = F^{-1}(u)$$

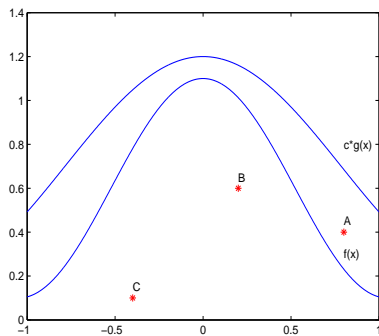
$$\Leftrightarrow u = F(x)$$

$$\Leftrightarrow u = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - u)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \log(u)$$

Motivation



Die Verwerfungsmethode (acceptance-rejection-method)

y: gesuchte Zufallszahl die der Verteilungsfunktion F genügt (f Dichte von F)

g: berechenbare Dichte mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Die Verwerfungsmethode (acceptance-rejection-method)

y : gesuchte Zufallszahl die der Verteilungsfunktion F genügt (f Dichte von F)

g : berechenbare Dichte mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Schritt 1: Generiere eine Zufallszahl x gemäß Dichte g

Die Verwerfungsmethode (acceptance-rejection-method)

y: gesuchte Zufallszahl die der Verteilungsfunktion F genügt (f Dichte von F)

g: berechenbare Dichte mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Schritt 1: Generiere eine Zufallszahl x gemäß Dichte g
- Schritt 2: Generiere eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahl u

Die Verwerfungsmethode (acceptance-rejection-method)

y: gesuchte Zufallszahl die der Verteilungsfunktion F genügt (f Dichte von F)

g: berechenbare Dichte mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Schritt 1: Generiere eine Zufallszahl x gemäß Dichte g
- Schritt 2: Generiere eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahl u
- Schritt 3: Falls $u \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$, setze $y=x$, andernfalls gehe wieder zu Schritt 1

Die Verwerfungsmethode (acceptance-rejection-method)

y: gesuchte Zufallszahl die der Verteilungsfunktion F genügt (f Dichte von F)

g: berechenbare Dichte mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Schritt 1: Generiere eine Zufallszahl x gemäß Dichte g
- Schritt 2: Generiere eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahl u
- Schritt 3: Falls $u \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$, setze $y=x$, andernfalls gehe wieder zu Schritt 1

Die Verwerfungsmethode (acceptance-rejection-method)

y: gesuchte Zufallszahl die der Verteilungsfunktion F genügt (f Dichte von F)

g: berechenbare Dichte mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Schritt 1: Generiere eine Zufallszahl x gemäß Dichte g
- Schritt 2: Generiere eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahl u
- Schritt 3: Falls $u \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$, setze $y=x$, andernfalls gehe wieder zu Schritt 1

Die so generierte Zufallszahl y genügt der Verteilung von F .

Der Poissonprozess

$\{N_B, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)\}$ heißt ein Poissonprozess mit lokal endlichem Intensitätsmaß μ , wenn

- N_{B_1}, N_{B_2}, \dots unabhängige Zufallsvariablen sind für disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$
- $N_B \sim Poi(\mu(B)), \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$

Existiert ein $\lambda \in (0, \infty)$, sodass

$$\mu(B) = \lambda v_n(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$$

dann heißt $\{N_B\}$ **homogener Poissonprozess** mit Intensität λ

Wenn μ absolutstetig bzgl. v_n , d.h. \exists eine Borel-messbare Funktion $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x) dx, \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$$

dann heißt $\{N_B\}$ **inhomogener Poissonprozess** mit Intensitätsfunktion $\lambda(x)$

$\{S_i \in B\}$ bezeichnen wir als messbare Indizierung der (zufälligen) Atome von N_B in B .

Der Poissonprozess in \mathbb{R}

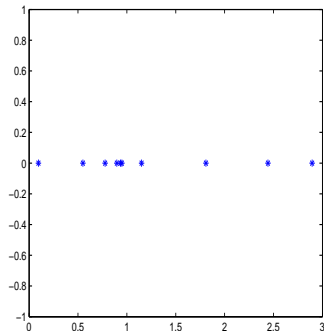


Abbildung: 10 Erneuerungszeitpunkte eines homogenen Poissonprozesses mit Intensität $\lambda=3$

Die bedingte Gleichverteilungseigenschaft

Theorem:

Sei $\{N_{\tilde{C}}\}$ ein homogener Poissonprozess auf

$$\tilde{C} := [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n)$$

Dann ist der Zufallsvektor $S_j = (S_{j1}, \dots, S_{jn})$ gleichverteilt in \tilde{C} , d.h. die unabhängigen Komponenten $S_{ij} \sim U([a_j, b_j))$

Erzeugung eines Poissonprozesses auf einem Quader

- Schritt 1: Generiere eine Realisierung $N_{\tilde{C}} \sim Poi(\lambda v_n(\tilde{C}))$
- Schritt 2: Falls $N_{\tilde{C}} = k$, generiere S_1, \dots, S_k mit $S_i = (S_{i1}, \dots, S_{in})$, wobei $S_{ij} \sim U([a_j, b_j])$
- Die Menge $\{S_i\}$ sind eine Realisierung des Poissonprozesses $N_{\tilde{C}}$ auf dem Quader \tilde{C}

Akzeptanz- und Verwerfungsmethode

- $C \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$: eine beliebige, beschränkte Borelmenge.
- $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$: ein beliebiges, lokal endliches Maß mit $0 < \mu(C) < \infty$.
- $\tilde{C} = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$: ein n-dimensionaler Quader mit $C \subset \tilde{C}$ und $\mu(\tilde{C}) < \infty$

Algorithmus

- Schritt 1: Generiere eine Realisierung $N_C \sim Poi(\lambda v_n)$
- Schritt 2: Falls $N_C = k$, dann generiere solange eine Realisierung s_1, s_2, \dots der unabhängigen Zufallsvektoren $S_i \in \tilde{C}$, bis k der s_1, s_2, \dots in C liegen.
- Dann ist die Menge $\{s_i : s_i \in C\}$ eine Realisierung des Poissonprozesses $\{N_B\}$ in C .

Theoreme

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$ ein Poissonprozess in E mit lokal endlichem Intensitätsmaß μ und $T : E \rightarrow \tilde{E}$ Borel-messbar, wobei die Urbilder von beschränkten Borel-Mengen beschränkt seien. Dann gilt:

- **Theorem 1:** $\{\tilde{N}_{\tilde{B}}, \tilde{B} \in \mathcal{B}_0(\tilde{E})\}$ mit $\tilde{N}_{\tilde{B}} = N_{T^{-1}(\tilde{B})}$ ist ein Poissonprozess in \tilde{E} mit Intensitätsmaß $\tilde{\mu}(\tilde{B}) = \mu(T^{-1}(B))$.

Theoreme

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$ ein Poissonprozess in E mit lokal endlichem Intensitätsmaß μ und $T : E \rightarrow \tilde{E}$ Borel-messbar, wobei die Urbilder von beschränkten Borel-Mengen beschränkt seien. Dann gilt:

- **Theorem 1:** $\{\tilde{N}_{\tilde{B}}, \tilde{B} \in \mathcal{B}_0(\tilde{E})\}$ mit $\tilde{N}_{\tilde{B}} = N_{T^{-1}(\tilde{B})}$ ist ein Poissonprozess in \tilde{E} mit Intensitätsmaß $\tilde{\mu}(\tilde{B}) = \mu(T^{-1}(B))$.
- **Theorem 2:** Seien $\{S_i\}$ die Atome eines Poissonprozesses $N_B, B \in \mathcal{B}_0(E)$. $\{U_i\}$ eine Folge iid Zufallsvektoren in \mathbb{R}^m , die von $\{S_i\}$ unabhängig sind, dann gilt:
 $N_{B \times C} = \#\{i : (S_i, U_i) \in B \times C\}, B \in \mathcal{B}(E), C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ist ein Poissonprozess.

Radiale Simulation (eines hom. Poissonprozesses im \mathbb{R}^2)

Sei $T_1, T_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ eine Folge von iid Zufallsvariablen, mit $T_i \sim \text{Exp}(1) \forall i$.

Sei $\lambda > 0$ beliebig, dann folgt mit Theorem 1, dass

$$N_B = \#\left\{i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{T_k}{\pi\lambda}} \in B\right\} \quad \forall B \in \mathcal{B}([0, \infty))$$

ein Poissonprozess in B ist.

Insbesondere ist $\{s_i\} = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}}$ eine Realisierung der Atome von $\{N_B\}$.

Seien nun u_1, u_2, \dots eine Folge von auf $[0, 2\pi)$ gleichverteilter Zufallszahlen, die unabhängig von den T_i sind.

\Rightarrow Mit Theorem 2 folgt: $\{(s_i, u_i)\}$ sind Realisierung eines Poissonprozesses.

\Rightarrow Ebenso folgt mit Theorem 1: $\{F(s_i, u_i)\}$,
 $F : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $F(s, u) := (s \cos(u), s \sin(u))$ sind Realisierung eines Poissonprozesses im \mathbb{R}^2 .

Verdünnung von Poissonprozessen

- $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$: Borel-messbare, lokal integrierbare Funktionen mit

$$\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- $\{S_i\}$: Atome eines Poissonprozesses mit Intensitätsfunktion λ_1 .
- U_1, U_2, \dots mit $U_i \sim U([0, 1])$
- Dann gilt:

$\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ mit

$$\tilde{N}_B = \#\{d : S_d \in B, U_d \leq \frac{\lambda_2(S_d)}{\lambda_1(S_d)}\} \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$$

ist ein Poissonprozess mit Intensitätsfunktion λ_2 .

Inhomogener Poissonprozess (Simulationsalgorithmus)

- **Schritt 1:** Generiere die Realisierung $s_1, \dots, s_k \in C$ eines homogenen Poissonprozesses in C , mit Intensität

$$\tilde{\lambda} = \sup_{x \in C} \lambda(x) < \infty$$

- **Schritt 2:** Generiere eine Realisierung u_1, \dots, u_k von auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallszahlen
- **Schritt 3:** Eliminiere diejenigen Punkte s_i , für die $u_i > \frac{\lambda(s_i)}{\tilde{\lambda}}$

Die verbleibenden Punkte bilden einen inhomogenen Poissonprozess in C mit Intensitätsfunktion $\lambda : C \rightarrow [0, \infty)$

Quellen & Literatur

- Schmidt, V. (2007), Vorlesungsskript Räumliche Statistik für Punktprozesse und weitere Modelle der stochastischen Geometrie. Ulm: Institut für Stochastik.
- Schmidt, V. (2006), Lecture Note Markov Chains and Monte-Carlo Simulation. Ulm: Department of Stochastics
- Ross, S. M. (1996), Simulation 2nd. ed., Berkeley: Department of Industrial Engineering and Operations Research

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!