

Der Poisson-Prozess im R^d

von Melanie Schlünder

12.10.2009

Gliederung

- I. Einleitung
- II. Der Binomiale Punktprozess
- III. Der Stationäre Poisson-Punktprozess
- IV. Der Allgemeine Poisson-Punktprozess

I. Einleitung

- Wichtig in der Stochastik: stochastische Punktmuster (**Punktprozesse**)
- Der einfachste & wichtigste Punktprozess:
der Poisson-Punktprozess
- Punkte im Muster können interagieren
- Keine Interaktionen $\leftrightarrow$ „vollständig zufälliges“ Punktmuster
→ Poisson-Punktprozess
- Zentrale Rolle des **Poisson-Punktprozess**:
 - 1) „Nullhypothese“ für statistische Tests
 - 2) Basismodell für kompliziertere Modelle und Simulationen



II. Der Binomiale Punktprozess

1. Einleitung

2. Eigenschaften

3. Simulation

a) Rejection sampling

b) Approximation

c) Transformation der Koordinaten

Der Binomial-Punktprozess

1. Einleitung
2. Eigenschaften
3. Simulation

- einfachstes Beispiel: zufälliger Punkt ξ gleichverteilt in kompakter Menge $W \subset \mathbb{R}^d$:

$$P(\xi \in A) = \frac{\nu_d(A)}{\nu_d(W)} \quad \text{für } A \subset W$$



- n unabh., gleichverteilte Punkte $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ bilden überlagert den **binomialen Punktprozess** $\Phi_{W^{(n)}}$

$$\begin{aligned} &P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) \\ &= P(\xi_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in A_n) \\ &= \frac{\nu_d(A_1)}{\nu_d(W)} \cdot \dots \cdot \frac{\nu_d(A_n)}{\nu_d(W)} \\ &= \frac{\nu_d(A_1) \cdot \dots \cdot \nu_d(A_n)}{\nu_d(W)^n} \end{aligned}$$

- $\Phi_{W^{(n)}}$ kann auch als „zufälliges Zählmaß“ gesehen werden

Der Binomial- Punktprozess

1. Einleitung
2. Eigenschaften
3. Simulation

Fazit: der binomiale Punktprozess ist unser erstes nicht-triviales Beispiel eines PP

Wichtig! Man kann ihn betrachten als:

- Punktprozess
- Zufallsmenge
- Zufallsmaß



Der Binomial-Punktprozess

1. Einleitung
2. Eigenschaften
3. Simulation

- **Verteilungseigenschaft:** $\Phi_{W^{(n)}}(A)$ (beschreibt die zufällige Anzahl an Punkten in A) ist binomialverteilt mit Parametern $n = \Phi_{W^{(n)}}(W)$ und $p = p(A) = \nu_d(A) / \nu_d(W)$

- **Intensität:** (= durchschnittliche Anzahl v. Punkten/Volumeneinheit)

$$\lambda = \frac{n \cdot p}{\nu_d(A)} = \frac{n}{\nu_d(W)}$$

- **Leerwahrscheinlichkeiten** (K kompakte Teilm. v. W):

$$P(\Phi_{W^{(n)}}(K) = 0) = \frac{(\nu_d(W) - \nu_d(K))^n}{\nu_d(W)^n}$$

- **Grenzwerteigenschaft:**

- $\Phi_{W^{(n)}}(A)$ ist asymptotisch poissonverteilt unter den Voraussetzungen $p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $np \rightarrow \text{konst.}$
- für den Grenzprozess Φ gilt:

$$\text{Erwartungswert: } E(\Phi(A)) = \lambda \nu_d(A)$$

Der Binomial-Punktprozess

1. Einleitung
2. Eigenschaften
3. Simulation

- Simulation eines bin. PP folgt aus Überlagerung der Simulation eines Zufallspunktes

- Beispiel: Simulation in $[0,1]^2$:

1. Bilde Folge $\{z_n\}$ unabhängiger, in $[0,1]$ gleichverteilten Zufallszahlen

2. $x_i = (z_{2i-1}, z_{2i}) \quad i \in \{1, \dots, n\}$
bilden nun eine Folge unabhängiger, in $[0,1]^2$ gleichverteilten Zufallspunkten



- $x_i = (z_{(i-1)d+1}, \dots, z_{id}) \quad i \in \{1, \dots, n\}$
bilden dann Folge in $[0,1]^d$

- Durch Verschiebung / Umskalierung funktioniert dieses Verfahren in jedem beliebigen Rechteck oder Hyperwürfel

Der Binomial-Punktprozess

1. Einleitung
2. Eigenschaften
3. Simulation

3 Techniken zur Simulation in (W beschränkt)

$$W \subset \mathbb{R}^d$$

1. Rejection Sampling

- Simulation einer Folge v. Zufallspunkten in Rechteck, das W enthält (bis erster Punkt in W fällt)
- Prozedur wiederholen, bis n Punkte in W

2. Approximation

- W durch Vereinigung von k offenen, disjunkten Rechtecken approximieren
(nähere Erläuterung -> Tafel)

3. Transformation von Koordinaten

- sinnvolle Technik, wenn W eine Symmetrie aufweist, z.B. W = Einheitskreis $b(0,1)$
- Gleichverteilter Zufallspunkt $(r \sim U[0,1], \theta \sim U[0,2\pi])$ in Polarkoordinaten $x=(r, \theta)$
- $r = \sqrt{z_1}$ und $\theta = 2\pi \cdot z_2$ liefern Methode zur Simulation von $x=(r, \theta)$

III. Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung

- 1.1 Fundamenteigenschaften
- 1.2 Weitere Eigenschaften
- 1.3 Anmerkungen

2. Momente und Momentmaße

3. Die Palmsche Verteilung

Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palmsche
Verteilung

1.1 Fundamentaleigenschaften

Der stat. Poisson-Punktprozess wird definiert durch

- 2 Fundamentaleigenschaften:

(1) Poissonverteilung von Punktzählern

- $\Phi(B)$ ist poissonverteilt mit
 $E(\Phi(B)) = \lambda \nu_d(B)$
(λ konstante Intensität, B Borelmenge, Φ
wird hier als zufälliges Zählmaß
betrachtet)

(2) Unabhängige Verteilung

- für k disjunkte Borelmengen $A_1, \dots, A_k$
bilden $\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k)$ k
unabhängige Zufallsvariablen

Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palmsche
Verteilung

1.2 Weitere Eigenschaften

a) Endlich-dimensionale Verteilungen

- Seien $B_1, \dots, B_k$ disjunkte, beschränkte Borelmengen

$\Rightarrow$ Es folgt mit (1) und (2):
 $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_k)$ sind unabhängige,
poissonverteilte Zufallsvariablen mit
Erwartungswerten $\lambda \nu_d(B_1), \dots, \lambda \nu_d(B_k)$

$\Rightarrow$ Daher gilt die Verteilung:

$$P(\Phi(B_1) = n_1, \dots, \Phi(B_k) = n_k) =$$

$$\frac{\lambda^{n_1 + \dots + n_k} (\nu_d(B_1))^{n_1} \cdot \dots \cdot (\nu_d(B_k))^{n_k}}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!} \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^k \lambda \nu_d(B_i)\right)$$

Der stationäre Poisson-Punktprozess

1.2 Weitere Eigenschaften

b) Stationarität und Isotropie

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palm'sche
Verteilung

- Def.: Ein Punktprozess $\Phi = \{x_n\}$ ist **stationär**, wenn der verschobene Prozess $\Phi_x = \{x_n + x\}$ (Verschiebung um bel. Punkt x) die gleiche Verteilung wie Φ besitzt (Φ hier: zufällige Menge an Punkten)
- Def.: Ein Punktprozess ist **isotrop**, wenn alle rotierten Prozesse $r\Phi = \{rx_n\}$ die gleiche Verteilung besitzen wie Φ
- Def.: Ein Punktprozess ist **bewegungsinvariant**, wenn er stationär und isotrop ist
- der stat. Poisson-Punktprozess ist definiert durch (1) und (2)
→ bewegungsinvariant

Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palmsche
Verteilung

1.2 Weitere Eigenschaften

c) Leerwahrscheinlichkeiten

$$\nu_B = P(\Phi(B) = 0) = \exp(-\lambda \nu_d(B))$$

- wichtiger Fall der sogenannten Kontakt-Verteilungsfunktionen: die „**sphärische Kontaktverteilungsfunktion**“ :

$$H_s(r) = 1 - P(\Phi(b(o, r)) = 0) = 1 - \exp(-\lambda b_d r^d)$$

sie ist die **Verteilungsfunktion des Abstandes vom Ursprung zum nächsten Punkt in Φ**



Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palmsche
Verteilung

1.2 Weitere Eigenschaften

d) Bedingte und binomiale Punktprozesse

- Betrachte Beschränkung von Φ auf kompakte Menge W unter der Bedingung $\Phi(W)=n$
- Wir erhalten einen binomialen Punktprozess in W mit n Punkten (siehe Kapitel II)
- Überprüfe dazu die endlich dimensional
Verteilungen auf Gleichheit (es reicht sogar der
Vergleich der Leerwahrscheinlichkeiten)

Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palmsche
Verteilung

1.3

Anmerkungen

- (1) und (2) sind i.A. nicht unabhängig:
 - (1) impliziert (2) (Renyi, 1967)
 - Wenn (1) „verdünnt“ (z.B. beschränkt auf alle konvexen Teilmengen von W) ist, kann (2) notwendig sein

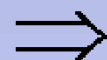
- Ein Prozess **muss** ein stat. PPP sein, wenn er folgenden 3 Eigenschaften genügt:
 - I. **Einfachheit** (keine gleichen Punkte)
 - II. **Stationarität** (Standpunkt d. Betrachters egal)
 - III. **Unabhängige Streuung** (keine Interaktionen)

Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palmsche
Verteilung

2. Momentmaße

- Momente von zufälligen Punktprozessen sind **Maße**
- Ab jetzt: Φ = zufälliges Zählmaß auf den Borelmengen in $\mathbb{R}^d$
- 1. Moment: $\Lambda(B) = E(\Phi(B))$
und weil die Zufallsvariable $\Phi(B)$
poissonverteilt ist mit $E(\Phi(B)) = \lambda \nu_d(B)$
gilt: $\Lambda(B) = \lambda \nu_d(B)$



also ist beim stat. PPP das **Momentmaß 1. Ordnung** (auch genannt Intensitätsmaß) ein **konstantes Vielfaches des Lebesguemaßes** mit dem Vielfachen λ

Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palmsche
Verteilung

Die Palmsche Verteilung

- oft erforderlich: Betrachtung eines beliebigen, **„typischen“** Punktes im Punktprozesses Φ
- Beispiel: Verteilungsfunktion D beschreibe die Verteilung des Abstandes eines „typischen“ Punktes zu seinem nächsten Nachbarn
- **Palmsche Wahrscheinlichkeiten** $\approx$
„Wahrscheinlichkeiten, dass ein PP eine bestimmte Eigenschaft besitzt, unter der Bedingung, dass an einer bestimmten Stelle ein Punkt gegeben ist (der typische Punkt)“

Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palmsche
Verteilung

1. Annäherung

- für D gilt:

$$\begin{aligned} D(r) &= P(\Phi(b(o, r)) > 1 \mid o) \\ &= 1 - P(\Phi(b(o, r)) = 1 \mid o) \end{aligned}$$

- Berechnung der Palmschen
Wahrscheinlichkeiten durch einen
Grenzwertprozess:

wir definieren $D_\varepsilon(r) =$

$$1 - P(\Phi(b(o, r) \setminus b(o, \varepsilon)) = 0 \mid \Phi(b(o, \varepsilon)) = 1)$$

und lassen dann ε gegen 0 gehen:

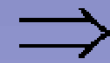
$$D(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon(r) = 1 - \exp(-\lambda b_d r^d)$$

$$\Rightarrow D(r) = H_s(r) \text{ für } r \geq 0$$



Der stationäre Poisson-Punktprozess

1. Charakterisierung
2. Momentmaße
3. Die Palmsche
Verteilung



Resultat:

$$P(\Phi(B) = n \parallel o) = P(\Phi(B) = n)$$

für beschränkte Borelmenge B



im Allgemeinen folgt **Slivnyak's Theorem**:

$$P(\Phi \in Y \parallel o) = P(\Phi \cup \{o\} \in Y)$$

Palmsche Verteilung des stat. PPP

=

„original“-Verteilung des stat. PPP vereinigt mit
einem Punkt im Ursprung

IV. Der allgemeine Poisson-Punktprozess

- Verallgemeinertes stochastisches Modell für Punktmuster, die Inhomogenitäten aufweisen
- Intensitätsmaß: Λ
- Es gelten auch hier:



(1) Poissonverteilung von Punktzählern

- $\Phi(B)$ ist poissonverteilt mit $E(\Phi(B)) = \Lambda(B)$ für eine Intensität Λ

(2) Unabhängige Verteilung

- für k disjunkte Borelmengen $A_1, \dots, A_k$ bilden $\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k)$ k unabhängige Zufallsvariablen

- Außerdem:

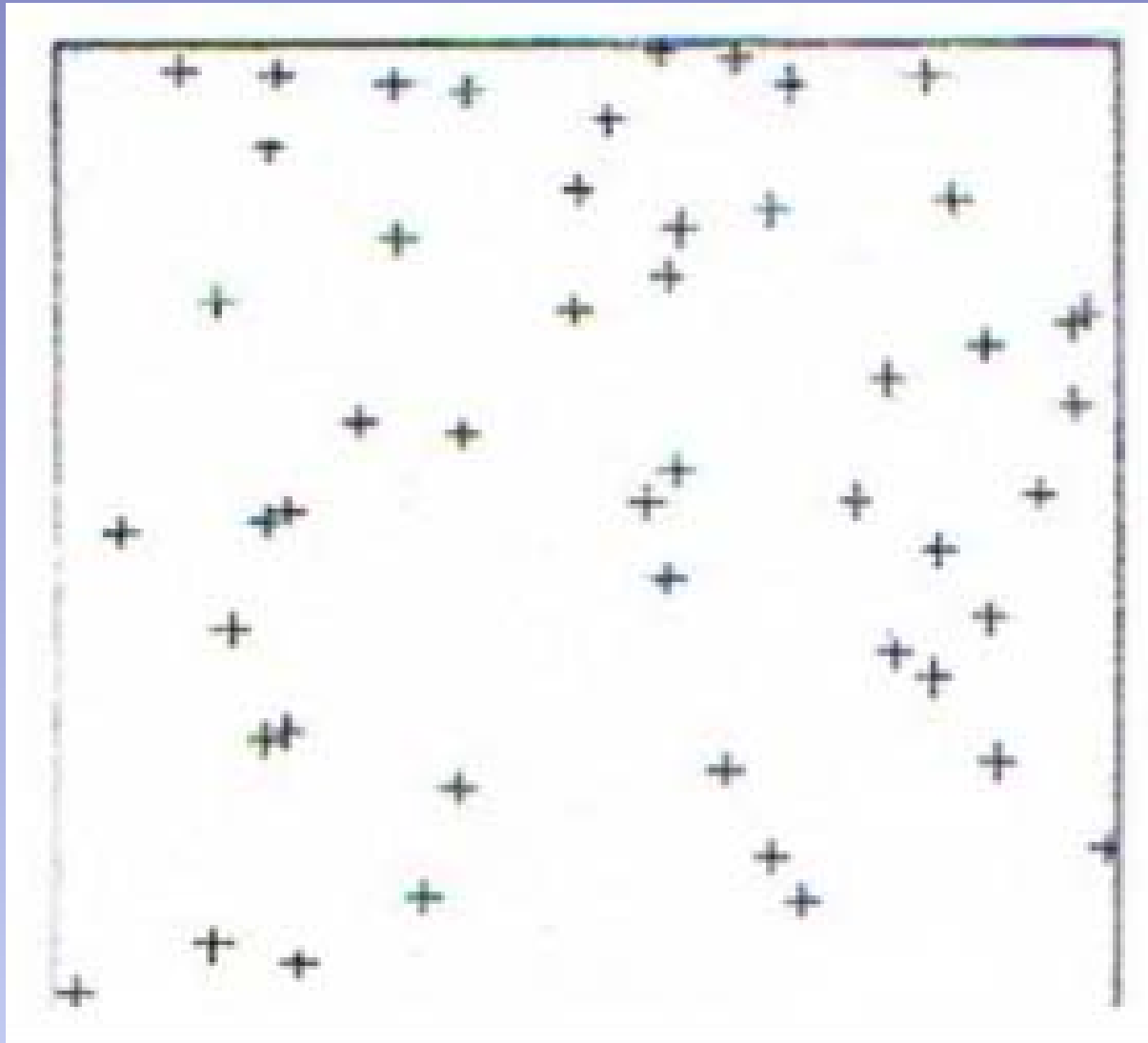
- Wenn Λ eine Dichte bzgl. des Lebesguemaßes hat, kann man schreiben:

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(x) dx$$

Intensitätsfunktion

V. Quellen

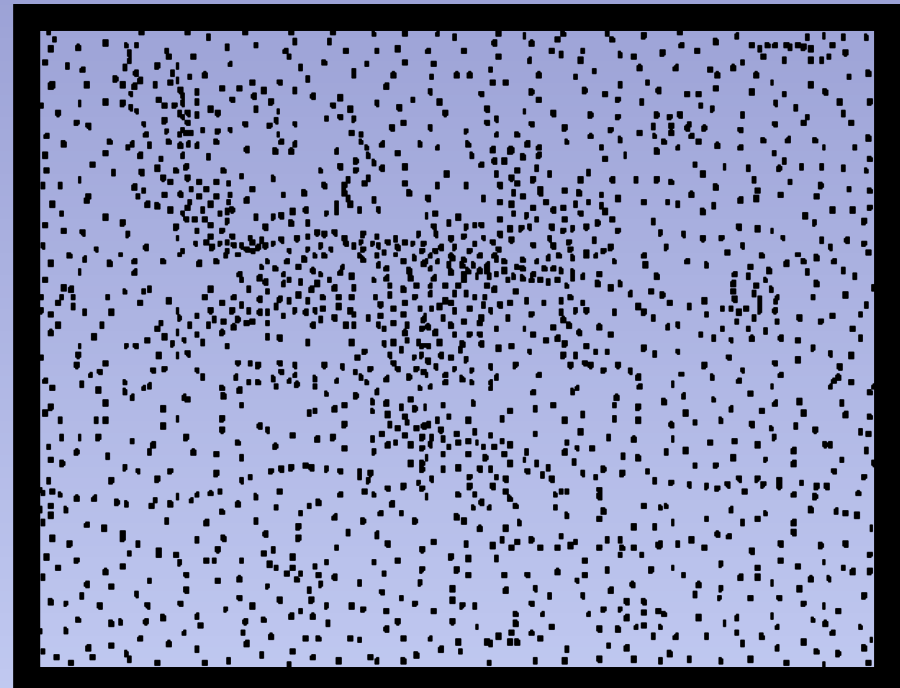
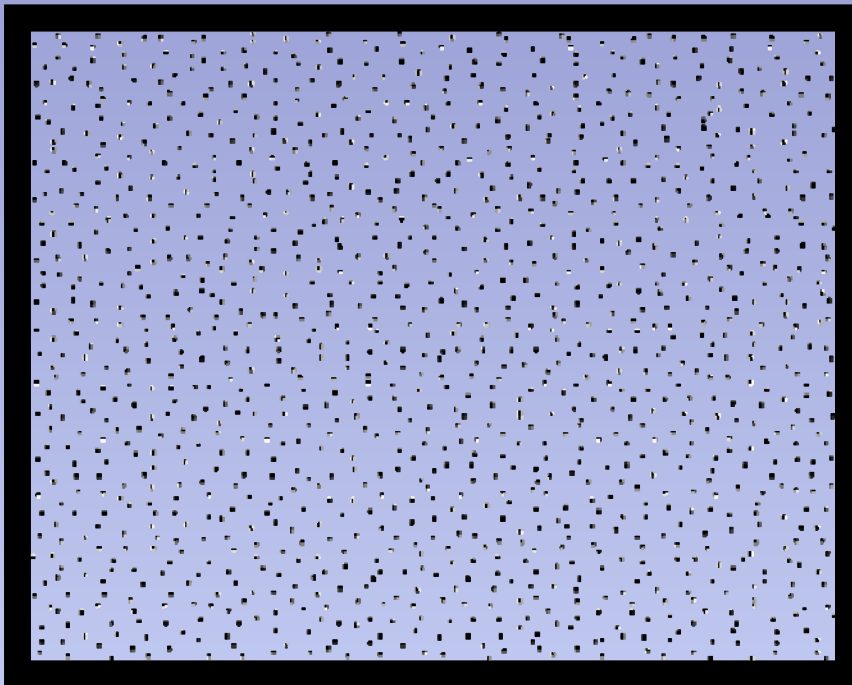
- Stochastic Geometry and its Applications
Second Edition
 - Dietrich Stoyan, Wilfried S. Kendall, Joseph Mecke
Wiley & Sons, Chichester, 1995.
(Kapitel 2.1, 2.2, 2.4, 2.5)
 - <http://www.heuler.net/stud/diplom/text/index.htm>

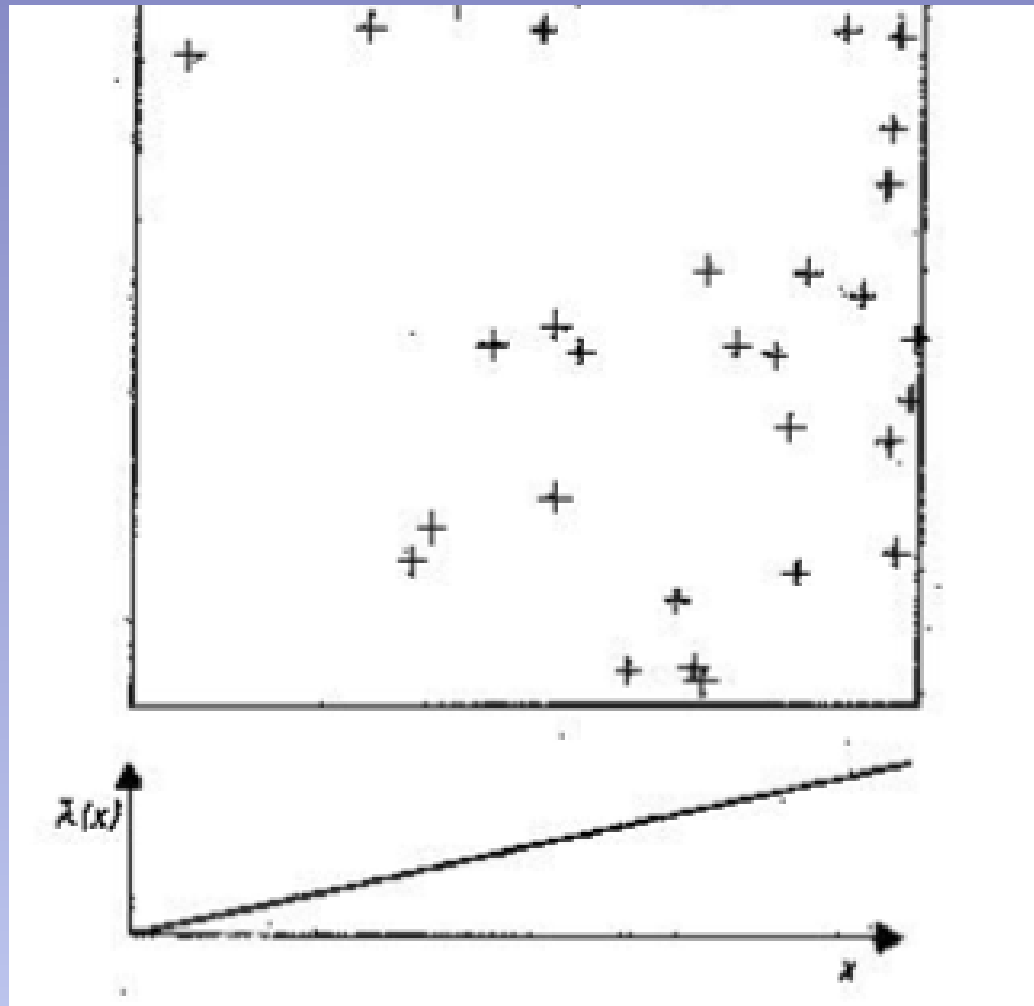


Simulation von 50 Zufallspunkten, die in einem Quadrat gleichverteilt sind



2 Beispiele für Punktprozesse





Simulation eines Poisson-Punktprozesses mit linearer Intensitätsfunktion $\lambda(x)$

