Seminar Stochastische Geometrie Punktprozessmodelle

Nadja Ferger

5. November 2009

Gliederung

Bezeichnungen

- $\mathbb{R}^d$: d-dimensionaler Raum der reellen Zahlen
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$
- $\mathcal{N}$: σ-Algebra der Punktprozesse
- **V**: Familie aller Borel-messbaren Funktionen $\nu : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ mit $\nu(x) = 1\ \forall x$ außerhalb einer beschränkten Borel-Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ liegt
- Φ_b: Basisprozess
- Φ: veränderter Punktprozess
- N_0: typischer Cluster

Einige Definitionen

- Ein Punktprozess Φ heißt **stationär**, falls er invariant gegenüber Verschiebungen ist.
- Ein Punktprozess Φ heißt **isotrop**, falls er invariant gegenüber Rotationen ist.
- Das **Intensitätsmaß** von Φ ist gegeben durch

$$\Lambda(B) = \mathbf{E}(\Phi(B)) = \int \varphi(B) P(d\varphi) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

- Das **erzeugende Funktional** ist definiert durch

$$G(\nu) = \mathbf{E}(\prod_{x \in \Phi} \nu(x)) \quad \forall \nu \in \mathbf{V}$$

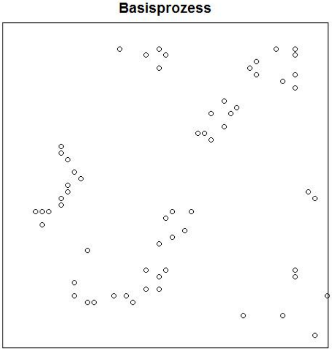
Operationen auf Punktprozessen

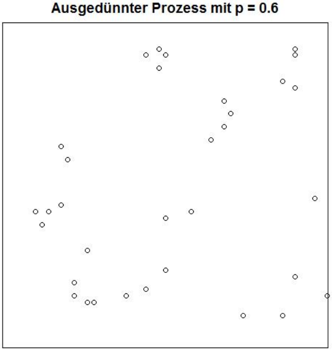
- Ausdünnung (Thinning)
- Clustern
- Superposition
- Kompression (Pressing)

Ausdünnung

Ausdünnung: Nach bestimmten Regeln werden Punkte im Basisprozess Φ_b gelöscht

$$\Phi_b \stackrel{Ausd\ddot{u}nnung}{\rightarrow} \Phi \quad , \text{also } \Phi \subset \Phi_b$$


Basisprozess


Ausgedünnter Prozess mit p = 0.6

Unabhängige Ausdünnung

Unabhängige Ausdünnung → keine Interaktion zwischen den Punkten und die Ausdünnungsfunktion ist unabhängig von Φ_b

$$\varphi_b \overset{p(x)-Ausd.}{\rightarrow} \varphi, \text{ wobei } p(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$$

- p-Ausdünnung: $p(x) = p \ \forall x \in \Phi_b$
  Löschwahrscheinlichkeit der Punkte in Φ_b ist $1 - p$; Löschen ist unabhängig vom Ort
- p(x)-Ausdünnung: Löschwahrscheinlichkeit für $x \in \Phi_b$ ist $1 - p(x)$; Löschen ist räumlich abhängig
- $\pi(x)$-Ausdünnung: $p(x) = \pi(x)$, wobei $\pi = \left\{\pi(x) : x \in \mathbb{R}^d\right\}$ Zufallsfeld

Abhängige Ausdünnung

Abhängige Ausdünnung $\rightarrow$ Ausdünnung abhängig von anderen Punkten in Φ_b

Beispiel: Matérn Hard-Core Prozess

Intensitätsmaß und Intensität

Sei Φ das Ergebnis einer p(x)-Ausdünnung auf Φ_b.

Dann ist das Intensitätsmaß von $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gegeben durch

$$\Lambda(B) = \int_B p(x)\Lambda_b(dx)$$

Falls $p(x) = p$, so ist die Intensität gegeben durch

$$\lambda = p\lambda_b$$

Erzeugendes Funktional

Das erzeugende Funktional G von Φ ist gegeben durch

$$G(\nu) = G_b(\nu_p) \quad \forall \nu \in \mathbf{V}$$

wobei $\nu_p = \nu(x)p(x) + 1 - p(x)$

G_b : erzeugendes Funktional von Φ_b

Spezialfall Poisson-Prozess

Falls Φ_b ein Poisson-Prozess ist, so gilt:

- Φ ist ebenfalls ein Poisson-Prozess
- gelöschte Punkte bilden ebenfalls einen Poisson-Prozess
- Φ_b stationär $\Rightarrow$ Φ stationär (gilt i.A. nur für p-Ausdünnung)
- Leerwahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{P}(\Phi(K) = 0) = e^{(-p\Lambda_b(K))}, K \subset \Phi_b \text{ kompakt}$$

- $\pi(x)$-Ausdünnung: Cox-Prozess

Clustern

Φ_b gegebener Punktprozess der Elternpunkte

$$\text{Elternpunkt } x \to \text{Cluster } N^x$$

Cluster-Punktprozess: $\Phi = \bigcup_{x \in \Phi_b} N^x$

Annahmen:

- $N^x \cap N^y = \emptyset$ falls $x \neq y$
- Φ ist lokal endlich

Ausdünnung: spezielles Clustern

Homogenes unabhängiges Clustern

- $\Phi_b = \{x_1, x_2, ...\}$ stationär mit Intensität λ_b
- Die Cluster sind von der Form

$$N^{x_i} = N_i + x_i \quad \forall x_i \in \Phi_b$$

  N_i: Familie von endlichen Punktmengen (iid) mit Verteilung **c**, unabhängig von Φ_b; enthält den Nullpunkt
- Falls Φ_b Poisson-Prozess, so heißt Φ Poisson-Clusterprozess

Intensität von Φ

Intensität:

$$\lambda = \lambda_b \bar{c} \quad , \bar{c} < \infty$$

$\bar{c}$: erwartete Anzahl von Punkten im Cluster N_0 (typischer Cluster)

Superposition

Seien Φ_1 und Φ_2 Punktprozesse mit $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$
Annahme: $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ mit Wahrscheinlichkeit 1

Dann gilt im Falle der Stationarität:

- $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ (Additivität des Maßes)
- $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
- $G(\nu) = G_1(\nu) \cdot G_2(\nu)$, falls Φ_1, Φ_2 unabhängig
- $P = P_1 * P_2$
- Φ_1, Φ_2 unabhängige Poisson-Prozesse $\Rightarrow \Phi$ Poisson-Prozess

Kompression

- Ergebnis einer linearen Transformation in der Ebene
- $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \stackrel{aff.Tr.}{\rightarrow} (\xi^{`}, \eta^{`})$ mit

$$\xi^{`} = \xi \text{ und } \eta^{`} = c\eta, 0 < c < 1$$

- Φ_b stationär $\Longrightarrow \Phi$ stationär
- Intensität: $\lambda = \frac{\lambda_b}{c}$

Definition Cox Prozess

Sei Q eine Verteilung auf $[\mathbb{M}, \mathcal{M}]$ (Raum aller nicht-negativen lokal-endlichen Maße auf $\mathbb{R}^d$). Sei P_Λ die Verteilung des Poisson-Prozesses mit Intensitätsmaß Λ. Sei weiterhin Ψ ein Zufallsmaß mit Verteilung Q.
Dann hat der Cox-Prozess Φ mit erzeugendem Zufallsmaß Ψ die Verteilung

$$P_\Phi(Y) = \int_{\mathbb{M}} P_\Lambda(Y) Q(d\Lambda) \ \forall Y \in \mathcal{N}$$

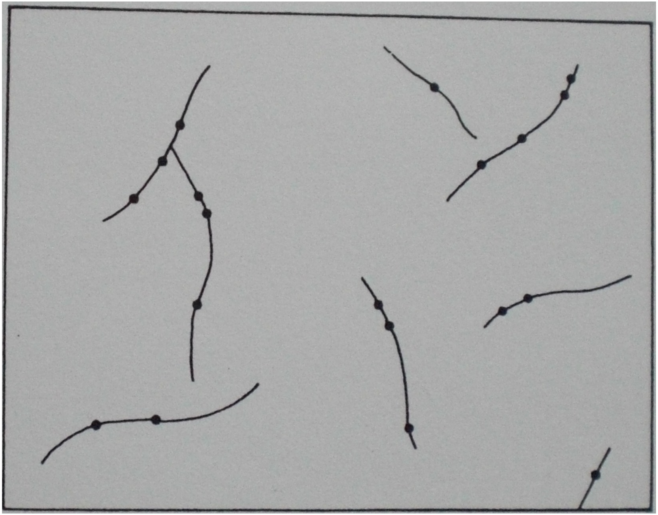
Simulation eines Cox-Prozesses

Eine Realisierung eines Cox-Prozesses kann in zwei Schritten simuliert werden

- **1. Schritt:** Generiere Λ mit Verteilung Q
- **2. Schritt:** Generiere einen Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß Λ

Punkte auf zufälligen Fasern

- Sei χ ein zufälliger Faserprozess
- $\Psi(B) = N_L h_1(\chi \cap B)\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
- N_L: Konstante > 0 (genauer: erwartete Anzahl von Punkten pro Einheitslänge der Fasern)
- $h_1(\chi \cap B)$: Hausdorff-Maß der Fasern geschnitten mit B
- Cox-Prozess bilden die Punkte, die mit Intensität N_L auf den Fasern von χ gleichverteilt sind



Formeln

- Erzeugendes Funktional:

$$G(\nu) = L_Q(1 - \nu) \quad \forall \nu \in \mathbf{V}$$

  L_Q: Laplace Funktional des erzeugenden Zufallsmaß Ψ von Φ

- Intensitätsmaß:

$$\Lambda = \Lambda_\Psi$$

Einleitung

- Neymann-Scott-Prozesse sind Beispiele für Poisson-Cluster-Prozesse
- Poisson-Cluster-Prozess: homogenes unabhängiges Clustern angewandt auf einen stationären Poisson-Prozess
- Elternpunkte bilden Poisson-Prozess Φ_b mit Intensität λ_b
- Tochterpunkte in N_0 : zufällige Anzahl, unabhängig und identisch verteilt
- Φ enthält nur Tochterpunkte, keine Elternpunkte; folglich gilt:

$$\bigcup_{x \in \Phi_b} N^x$$

Eigenschaften

- Φ stationär (unter vorherigen Annahmen)
- Verteilung der Tochterpunkte isotrop $\Rightarrow \Phi$ isotrop
- Intensität: $\lambda = \lambda_b \bar{c}$
  $\bar{c}$: Durchschnittliche erwartete Anzahl an Tochterpunkten je Elternpunkt

Palm-Verteilung

Sei P die Verteilung von Φ und $\mathbf{c}_0$ die Palm-Verteilung N_0. Dann ist die Palm-Verteilung eines Poisson-Cluster-Prozesses gegeben durch

$$P_0 = P * \mathbf{c}_0$$

wobei $\mathbf{c}_0(Y) = \frac{1}{c}\mathbf{E}(\sum_{x \in N_0} \mathbf{1}_Y(N_0 - x)) \quad \forall Y \in \mathcal{N}$

Nächster-Nachbar-Abstand-Verteilungsfunktion

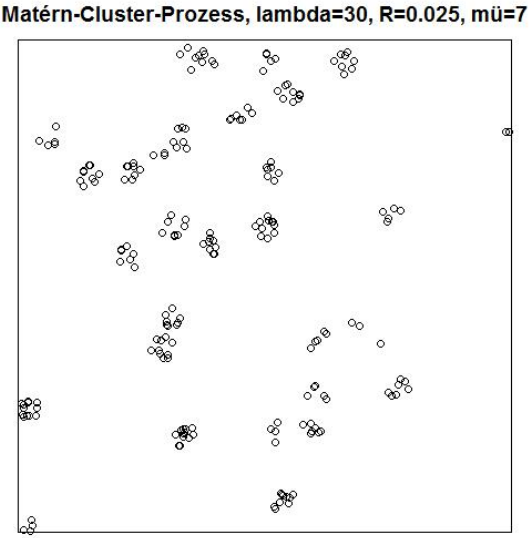
Nächster-Nachbar-Abstand-Verteilungsfunktion

$$1 - D(r) = \mathbf{P}(\Phi(b(o,r)) = 0) \cdot \mathbf{c}_o(\{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(b(o,r)) = 1\}) \text{ für } r \geq 0$$

Matérn-Cluster-Prozess

- Die Anzahl der Punkte in N_0 ist Poisson-verteilt mit Parameter $\mu = \bar{c}$
- Die Punkte in N_0 sind unabhänig und gleich verteilt in der Kugel $b(o, R)$
- Intensität:

$$\lambda = \lambda_b \mu$$


Matérn-Cluster-Prozess, lambda=30, R=0.025, mü=7

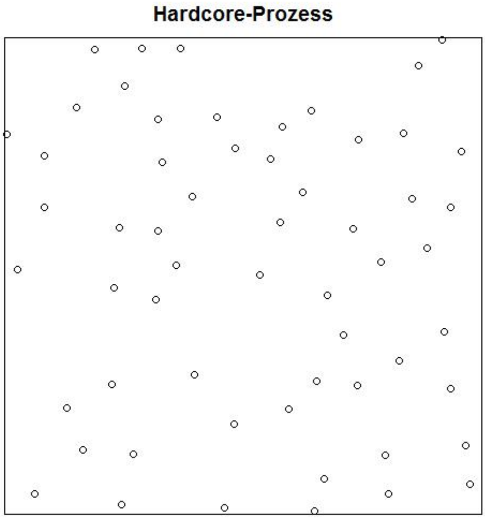
Simulation von Neymann-Scott-Prozessen

1. Simuliere den Eltern-Poisson-Prozess im Fenster $W \oplus b(o, R)$, wobei R ein Radius ist, so dass $\mathbf{P}(N_0 \subset b(o, R))$ sehr groß oder 1 wird
2. Jeder Elternpunkt x wird durch ein Cluster N^xersetzt
3. Das Ergebnis ist die Vereinigung aller Tochterpunkte in W

Beispiel: Larven auf einer Wiese

Charakterisierung

- abhängige Ausdünnung angewandt auf einen Poisson-Prozess Φ_b mit Intensität λ_b
- Punkte haben Mindestabstand h
- Hard-Core-Modelle beschreiben Mittelpunkte von Kreisen/Kugeln mit Radius $R = \frac{h}{2}$, die sich nicht schneiden


Hardcore-Prozess

Matérn Hard-Core-Prozess

- Punkte von Φ_b werden unabhängig voneinander mit Zufallszahlen markiert (gleichverteilt im Intervall $(0, 1)$)
- $x \in \Phi_b$ mit der Markierung $m(x)$ bleibt erhalten, falls die Kugel $b(x, h)$ keine Punkte von Φ_b enthält, deren Marke kleiner ist als $m(x)$, also gilt:

$$\Phi = \{x \in \Phi_b : m(x) < m(y) \forall y \in \Phi_b \cap b(x, h) \setminus \{x\}\}$$

- Intensität

$$\lambda = \frac{1 - exp(-\lambda_b c)}{c}, \text{ wobei } c = b_d h^d$$

- *Beispiel:* Keimlinge und deren Wachstumsbeginn

Literaturquellen

- D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke
  Stochastic Geometry and its Applications
- V. Schmidt
  Vorlesungsskript Räumliche Statistik
- http://www.spatstat.org/