Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko
Sebastian Lück

WS 2010/2011
19.01.2011

Risikotheorie II
Übungsblatt 11

Aufgabe 1
Formuliere einen Algorithmus zur Simulation einer logistisch mit Parametern μ und s verteilten Zufallsvariable, wenn bereits ein Verfahren zur Simulation von $U(0,1]$-verteilten Zufallsvariablen zur Verfügung steht.

Aufgabe 2
Die $\Gamma(n,1)$-Verteilung soll für $n > 2$ mit Hilfe der Akzeptanz- und Verwerfungsmethode simuliert werden, wobei als Vorschlagsverteilung eine $\text{Exp}(\lambda)$-Verteilung verwendet werden soll. Ermittle einen aus Performance-Sicht optimalen Wert für den Parameter λ.

Aufgabe 3

(a) Die Zufallsvariablen $Y_1 \sim \Gamma(\alpha,1)$ und $Y_2 \sim \Gamma(\beta,1)$ seien unabhängig, wobei $\alpha,\beta \geq 1$. Zeige, dass
$$\frac{Y_1}{Y_1+Y_2} \sim B(\alpha,\beta),$$
wobei $B(\alpha,\beta)$ die Betaverteilung mit den gegebenen Parametern bezeichnet.

(b) Formuliere einen Algorithmus zur Simulation von $B(\alpha,\beta)$-verteilten Zufallsvariablen. Unterscheide den Fall $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ von der allgemeinen Situation.

Aufgabe 4 (von Neumann Algorithmus)
Seien $U_1, U_2, \ldots \sim U(0,1)$ unabhängig und $N = \min\{n : \; U_{n-1} < U_n\}$ der Index der ersten Zufallsvariable, die größer als ihr Vorgänger ist.

(a) Berechne für $y \in (0,1)$ die Wahrscheinlichkeiten
$$\begin{aligned}&P(N > n,\; U_1 \leq y),\\ &P(N = n,\; U_1 \leq y),\\ &P(N \text{ ist gerade},\; U_1 \leq y) \text{ und}\\ &P(N \text{ ist gerade}).\end{aligned}$$

(b) Seien $\{N_i\}_{i\geq 1}$ iid Kopien von N und $U_1^{(i)}$ zugehörige erste Zufallsvariablen. Wir definieren die Stoppzeit $T = \min\{i : \; N_i \text{ ist gerade}\}$. Zeige, dass
$$U_1^{(T)} + \sum_{i=1}^{T} N_i \sim \text{Exp}(1).$$