Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko
Sebastian Lück

WS 2010/2011
02.02.2011

Risikotheorie II
Übungsblatt 12

Aufgabe 1
Sei $\{X_t : t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess auf dem abzählbar unendlichen Zustandsraum $E = \mathbb{Z}$ mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, die von X_0 unabhängig sind. Es gelte ferner $\lim_{h \downarrow 0} P(X_h - X_0 = k) = \delta_{0k}$. Zeige, dass $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Markov-Prozess ist.
Beachte: Die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen lauten in diesem Fall $p_{ij}(h_1 + h_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{ik}(h_1)p_{kj}(h_2)\ \forall i, j \in \mathbb{Z},\ h_1, h_2 \geq 0$.

Aufgabe 2
Wir betrachten ein Bonus-Malus System mit einer Malusklasse M und zwei Bonusklassen B_1 und B_2. Wenn eine Police für ein Jahr schadensfrei war, wird sie im folgenden Jahr in die nächstgünstigere Klasse eingestuft, bzw. verbleibt in B_2, wenn sie dort schon war. Im Falle eines einzigen Schadens wird die Police in die nächst niedrigere Schadensfreiheitsklasse herabgestuft, bzw. verbleibt in M. Falls mindestens zwei Schäden gemeldet werden, erfolgt eine Herabstufung um zwei Klassen aus Stufe B_2, um eine Stufe aus B_1, und falls die Police bereits in M ist, verbleibt sie dort. Es gibt zwei unterschiedliche Risikokollektive R_1 and R_2, die sich lediglich in der Verteilung der Schadenanzahl unterscheiden. Alle Schäden werden als unabhängig mit einer erwarteten Schadenhöhe von 500 EUR angenommen. Die Schadenanzahlverteilung ist wie folgt gegeben:

	Schadenanzahl		
Risikotyp	0	1	2
R_1	0.7	0.2	0.1
R_2	0.5	0.3	0.2

(a) Berechne die Nettoprämie, also den erwarteten Schaden einer Police, für die Risikotypen R_1 und R_2.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Police, die zu Beginn des aktuellen Jahres in Klasse M ist, nach drei Jahren in Klasse B_1 ist.

(c) Die in Klasse M befindlichen Policen eines Portfolios seien zu 60% vom Typ R_1 und zu 40% vom Typ R_2. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Gesamtportfolio ausgewählte Police der aktuellen Klasse M nach 2 Jahren in Klasse B_1 ist.

Aufgabe 3 Wir betrachten ein Bonus-Malus System mit drei Klassen A, B und C. Die Verteilung der jährlichen Schadenanzahl N einer Police sei gegeben durch $P(N = 0) = 5/9$, $P(N = 1) = 1/9$ und $P(N > 1) = 1/3$. Das Klassifikationsdiagramm des Bonus-Malus Systems sei wie folgt gegeben:

	A	B	C
A	0	1	>1
B	0	1	>1
C	-	0	>0

(a) Berechne die Wahrscheinlichlkeit, dass eine Police, die zu Beginn des aktuellen Jahres in Klasse A ist, nach drei Jahren ebenfalls in Klasse A ist.

(b) Zeichne ein Übergangsdiagramm der Markov-Kette. Zeige, dass die Markov-Kette ergodisch ist und berechne ihre stationäre Grenzverteilung.

(c) Ein Versicherungsbestand umfasse 10000 Verträge. Die Prämie der Schadensfreiheitsklassen A,B und C seien 150 EUR, 300 EUR bzw. 450 EUR. Berechne die langfristig erwarteten jährlichen Prämieneinnahmen aus diesem Bestand.