



ulm university universität
uulm

Stochastik II

Vorlesungsskript
(Arbeitsversion)

Prof. Dr. Evgeny Spodarev

Dieses Exemplar wurde aus
Studiengebühren finanziert.

ULM
2010

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Theorie der zufälligen Funktionen	1
1.1	Zufällige Funktionen	1
1.2	Elementare Beispiele	5
1.3	Regularitätseigenschaften von Trajektorien	6
1.4	Differenzierbarkeit von Trajektorien	11
1.5	Momente und Kovarianz	12
1.6	Stationarität und Unabhängigkeit	14
1.7	Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen	15
1.8	Ergänzende Aufgaben	17
2	Zählprozesse	18
2.1	Erneuerungsprozesse	18
2.2	Poisson-artige Prozesse	26
2.2.1	Poisson-Prozesse	26
2.2.2	Zusammengesetzter Poisson-Prozess	31
2.2.3	Cox-Prozess	32
3	Wiener-Prozess	34
3.1	Elementare Eigenschaften	34
3.2	Explizite Konstruktion des Wiener-Prozesses	35
3.2.1	Haar- und Schauder-Funktionen	35
3.2.2	Wiener-Prozess mit f.s. stetigen Pfaden	37
3.3	Verteilungs- und Pfadeneigenschaften vom Wiener-Prozess	40
3.3.1	Verteilung des Maximums	40
3.3.2	Invarianzeigenschaften	42
	Literaturverzeichnis	45

1 Allgemeine Theorie der zufälligen Funktionen

1.1 Zufällige Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ ein meßbarer Raum, $\Omega, \mathcal{S} \neq \emptyset$.

Definition 1.1.1

Ein *zufälliges Element* $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ ist eine $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -meßbare Abbildung (Bezeichnung: $X \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$), d.h.,

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{B}.$$

Falls X ein zufälliges Element ist, dann ist $X(\omega)$ eine *Realisierung von X* für beliebige $\omega \in \Omega$.

Wir sagen, dass die σ -Algebra \mathcal{B} von Teilmengen von \mathcal{S} durch das Mengensystem \mathcal{M} erzeugt wird (\mathcal{M} enthält ebenso Teilmengen von \mathcal{S} als seine Elemente), wenn

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \supset \mathcal{M} \\ \mathcal{F}\text{-}\sigma\text{-Algebra auf } \mathcal{S}}} \mathcal{F}$$

(Bezeichnung: $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M})$).

Falls \mathcal{S} ein topologischer oder metrischer Raum ist, dann wählt man oft \mathcal{M} als Klasse aller offenen Mengen von \mathcal{S} und nennt $\sigma(\mathcal{M})$ Borelsche σ -Algebra (Bezeichnung: $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{S})$).

Beispiel 1.1.1 1. Falls $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann heißt ein zufälliges Element X eine *Zufallsvariable*.

2. Falls $\mathcal{S} = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $m > 1$, dann heißt X *Zufallsvektor*. Zufallsvariablen und Zufallsvektoren betrachtet man oft in den Vorlesungen „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“ und „Stochastik I“.

3. Sei \mathcal{S} die Klasse aller abgeschlossenen Mengen von \mathbb{R}^m . Sei

$$\mathcal{M} = \{\{A \in \mathcal{S} : A \cap B \neq \emptyset\}, \quad B - \text{beliebiges Kompaktum aus } \mathbb{R}^m\}.$$

Dann ist $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ eine *zufällige abgeschlossene Menge*.

Als Beispiel betrachten wir n unabhängige gleichverteilte Punkte $Y_1, \dots, Y_n \in [0, 1]^m$ und $R_1, \dots, R_n > 0$ fast sicher unabhängige Zufallsvariablen, die auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ wie Y_1, \dots, Y_n definiert sind. Betrachten wir $X = \cup_{i=1}^n B_{R_i}(Y_i)$. Dies ist offensichtlich eine zufällige Menge. Eine beispielhafte Realisierung liefert Abbildung 1.1.

Aufgabe 1.1.1

Seien (Ω, \mathcal{A}) und $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ meßbare Räume, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M})$, wobei \mathcal{M} eine Klasse von Teilmengen von \mathcal{S} ist. Zeigen Sie, dass $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ genau dann $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -meßbar ist, wenn $X^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{M}$.

Definition 1.1.2

Sei T eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ eine Familie von meßbaren Räumen. Eine Familie $X = \{X(t), t \in T\}$ von Zufallselementen $X(t) : \Omega \rightarrow \mathcal{S}_t$ definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{A}|\mathcal{B}_t$ -meßbar für alle $t \in T$ heißt *zufällige Funktion* (assoziiert mit $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$).

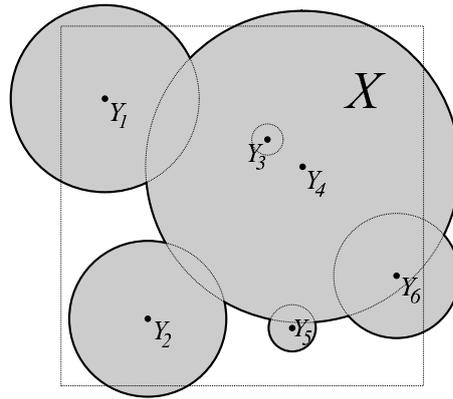


Abbildung 1.1: Beispiel einer zufälligen Menge $X = \cup_{i=1}^6 B_{R_i}(Y_i)$

Es gilt also $X : \Omega \times T \rightarrow (\mathcal{S}_t, t \in T)$, d.h. $X(\omega, t) \in \mathcal{S}_t$ für alle $\omega \in \Omega, t \in T$ und $X(\cdot, t) \in \mathcal{A} | \mathcal{B}_t, t \in T$. Sehr oft wird ω in der Bezeichnung unterlassen und man schreibt $X(t)$ an Stelle von $X(\omega, t)$. In den meisten Fällen hängt auch $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)$ nicht von $t \in T$ ab: $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{S}, \mathcal{B})$ für alle $t \in T$.

Spezialfälle zufälliger Funktionen:

1. $T \subseteq \mathbb{Z}$: X heißt dann *zufällige Folge* oder *stochastischer Prozess in diskreter Zeit*.
Beispiel: $T = \mathbb{Z}, \mathbb{N}$.
2. $T \subseteq \mathbb{R}$: X heißt *stochastischer Prozess in stetiger Zeit*.
Beispiel: $T = \mathbb{R}_+, [a, b], -\infty < a < b < \infty, \mathbb{R}$.
3. $T \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 2$: X heißt *zufälliges Feld*.
Beispiel: $T = \mathbb{Z}^d, \mathbb{R}_+^d, \mathbb{R}^d, [a, b]^d$.
4. $T \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: X heißt *Mengen-indizierter Prozess*.
Falls $X(t)$ fast sicher nichtnegativ und σ -additiv auf der σ -Algebra T ist, dann wird X *zufälliges Maß* genannt.

Die Tradition, die Indexmenge durch T zu bezeichnen, kommt von der Interpretation von $t \in T$ in den Fällen 1 und 2 als *Zeitparameter*.

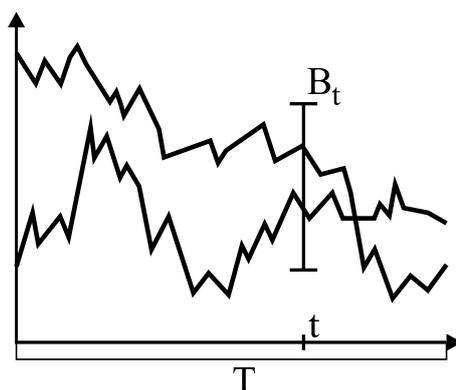
Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt $\{X(\omega, t), t \in T\}$ eine *Trajektorie* bzw. ein *Pfad* der zufälligen Funktion X .

Wir möchten zeigen, dass die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ ein zufälliges Element im entsprechenden Funktionsraum ist, welcher mit einer σ -Algebra ausgestattet ist, die jetzt spezifiziert wird.

Sei $\mathcal{S}_T = \prod_{t \in T} \mathcal{S}_t$ das kartesische Produkt von $\mathcal{S}_t, t \in T$, d.h., $X \in \mathcal{S}_T$ falls $X(t) \in \mathcal{S}_t, t \in T$. Die *elementare Zylindermenge* in \mathcal{S}_T wird definiert als

$$C_T(B_t) = \{X \in \mathcal{S}_T : X(t) \in B_t\},$$

wobei $t \in T$ ein ausgewählter Punkt aus T und $B_t \in \mathcal{B}_t$ eine Teilmenge in \mathcal{B}_t ist. $C_T(B_t)$ enthält also alle Trajektorien X , die durch das „Tor“ B_t gehen, siehe Abbildung 1.2.

Abbildung 1.2: Trajektorien, die ein „Tor“ B_t passieren.**Definition 1.1.3**

Die *zylindrische σ -Algebra* \mathcal{B}_T wird eingeführt als eine σ -Algebra erzeugt in \mathcal{S}_T durch die Familie von allen Elementarzylindern. Man bezeichnet sie durch $\mathcal{B}_T = \otimes_{t \in T} \mathcal{B}_t$. Falls $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}$ für alle $t \in T$, dann schreibt man \mathcal{B}^T an Stelle von \mathcal{B}_T .

Lemma 1.1.1

Die Familie $\{X = X(t), t \in T\}$ ist eine zufällige Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Phasenräumen $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ genau dann, wenn für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung $\omega \mapsto X(\omega, \cdot)$ $\mathcal{A}|\mathcal{B}_T$ -meßbar ist.

Aufgabe 1.1.2

Beweisen Sie Lemma 1.1.1.

Definition 1.1.4

Sei X ein zufälliges Element: $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$, d.h. X sei $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -meßbar. Die *Verteilung von X* ist das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_X auf $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, so dass $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$.

Lemma 1.1.2

Ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ kann als die Verteilung eines Zufallselementes X betrachtet werden.

Beweis Setze $\Omega = \mathcal{S}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mathbb{P} = \mu$ und $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega$. □

Wann existiert eine zufällige Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften? Eine zufällige Funktion, die aus unabhängigen Zufallselementen besteht, existiert immer. Diese Behauptung ist bekannt.

Theorem 1.1.1 (Lomnicki, Ulam):

Sei $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t, \mu_t)_{t \in T}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen. Es existiert eine zufällige Folge $X = \{X(t), t \in T\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (assoziiert mit $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$), so dass

1. $X(t)$, $t \in T$ unabhängige Zufallselemente sind.
2. $\mathbb{P}_{X(t)} = \mu_t$ auf $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$.

Viele wichtige Zufallsprozesse sind auf Basis von unabhängigen zufälligen Elementen konstruiert; vgl. Beispiele im Abschnitt 1.2.

Definition 1.1.5

Sei $X = \{X(t), t \in T\}$ eine zufällige Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Phasenraum $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$. Die endlich-dimensionalen Verteilungen von X werden definiert als das Verteilungsgesetz $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}$ von $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$ auf $(\mathcal{S}_{t_1, \dots, t_n}, \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n})$, für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$, wobei $\mathcal{S}_{t_1, \dots, t_n} = \mathcal{S}_{t_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{t_n}$ und $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n} = \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n}$, die σ -Algebra in $\mathcal{S}_{t_1, \dots, t_n}$ ist, die von allen Mengen $B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$, $B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}$, $i = 1, \dots, n$, erzeugt wird, d.h., $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(C) = \mathbb{P}((X(t_1), \dots, X(t_n))^T \in C)$, $C \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n}$. Insbesondere für $C = B_1 \times \dots \times B_n$, $B_k \in \mathcal{B}_{t_k}$:

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = \mathbb{P}(X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n).$$

Aufgabe 1.1.3

Zeigen Sie, dass $X_{t_1, \dots, t_n} = (X(t_1), \dots, X(t_n))^T$ ein $\mathcal{A}|\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n}$ -meßbares Zufallselement ist.

Definition 1.1.6

Sei $\mathcal{S}_t = \mathbb{R}$ für alle $t \in T$. Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt *symmetrisch*, falls alle ihre endlich-dimensionalen Verteilungen symmetrische Wahrscheinlichkeitsmaße sind, d.h., $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(A) = \mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(-A)$ für $A \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n}$ und alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$. Dabei bedeutet $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(-A) = \mathbb{P}((-X(t_1), \dots, -X(t_n))^T \in A)$.

Aufgabe 1.1.4

Zeigen Sie, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen einer zufälligen Funktion X folgende Eigenschaften besitzen: für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, $B_k \in \mathcal{S}_{t_k}$, $k = 1, \dots, n$ und eine beliebige Permutation (i_1, \dots, i_n) von $(1, \dots, n)$ gilt:

1. *Symmetrie*: $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = \mathbb{P}_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(B_{i_1} \times \dots \times B_{i_n})$
2. *Konsistenz*: $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_{n-1} \times \mathcal{S}_{t_n}) = \mathbb{P}_{t_1, \dots, t_{n-1}}(B_1 \times \dots \times B_{n-1})$

Folgender Satz zeigt, dass diese Eigenschaften hinreichend sind, um die Existenz einer zufälligen Funktion X mit vorgegebenen endlich-dimensionalen Verteilungen zu beweisen.

Theorem 1.1.2 (Kolmogorov):

Sei $\{\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}, n \in \mathbb{N}, \{t_1, \dots, t_n\} \subset T\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, welche die Bedingungen 1 und 2 von Aufgabe 1.1.4 erfüllen. Dann existiert eine zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit endlich-dimensionalen Verteilungen $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}$.

Beweis Siehe [13], Abschnitt II.9. □

Dieser Satz gilt auch auf allgemeineren (jedoch nicht beliebigen!) Räumen als \mathbb{R}^m , auf sog. *Borel-Räumen*, die in einem gewissen Sinne isomorph zu $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$ oder einem Teilraum davon sind.

Definition 1.1.7

Sei $X = \{X(t), t \in T\}$ eine zufällige Funktion mit Werten in $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, d.h., $X(t) \in \mathcal{S}$ fast sicher für beliebige $t \in T$. X heißt *meßbar*, falls die Abbildung $X : (\omega, t) \mapsto X(\omega, t) \in \mathcal{S}$, $(\omega, t) \in \Omega \times T$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}|\mathcal{B}$ -meßbar ist.

Somit liefert die Definition 1.1.7 nicht nur die Meßbarkeit von X bzgl. $\omega \in \Omega$: $X(\cdot, t) \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$ für alle $t \in T$, sondern $X(\cdot, \cdot) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}|\mathcal{B}$ als Funktion von (ω, t) . Die Meßbarkeit von X ist dann von Bedeutung, wenn $X(\omega, t)$ zu zufälligen Zeitpunkten $\tau : \Omega \rightarrow T$ betrachtet wird: $X(\omega, \tau(\omega))$. Dies ist insbesondere in der Martingaltheorie der Fall, wenn τ eine sog. Stoppzeit für X ist. Denn die Verteilung von $X(\omega, \tau(\omega))$ kann stark von der Verteilung von $X(\omega, t)$, $t \in T$, abweichen.

1.2 Elementare Beispiele

Für die explizite Konstruktion kann der Satz von Kolmogorov nur in wenigen Fällen direkt benutzt werden, da bei vielen zufälligen Funktionen ihre endlich-dimensionalen Verteilungen nicht explizit angegeben werden können. In diesen Fällen konstruiert man eine neue zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ als $X(t) = g(t, Y_1, Y_2, \dots)$, $t \in T$, wobei g eine meßbare Funktion ist und $\{Y_n\}$ eine Folge von Zufallselementen (auch zufälligen Funktionen) ist, deren Existenz bereits sichergestellt wurde. Hier geben wir einige Beispiele dafür.

Sei $X = \{X(t), t \in T\}$ eine reellwertige zufällige Funktion mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Weißes Rauschen:

Definition 1.2.1

Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt *weißes Rauschen*, falls alle $X(t)$, $t \in T$, unabhängige und identisch verteilte (u.i.v.) Zufallsvariablen sind.

Weißes Rauschen existiert nach dem Satz 1.1.1. Es wird verwendet um das Rauschen in (elektromagnetischen oder akustischen) Signalen darzustellen. Falls $X(t) \sim \text{Ber}(p)$, $p \in (0, 1)$, $t \in T$, so spricht man von *Salt-and-pepper Rauschen*, also vom binären Rauschen, das bei Übertragung von binären Daten in Computer-Netzwerken auftritt. Falls $X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, $t \in T$, so wird X *Gauß'sches weißes Rauschen* genannt. Es tritt z.B. in akustischen Signalen auf.

2. Gauß'sche zufällige Funktion:

Definition 1.2.2

Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt *Gauß'sch*, falls alle ihre endlich-dimensionalen Verteilungen Gauß'sch sind, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \subset T$ gilt

$$X_{t_1, \dots, t_n} = ((X(t_1), \dots, X(t_n)))^\top \sim \mathcal{N}(\mu_{t_1, \dots, t_n}, \sum_{t_1, \dots, t_n}),$$

wobei der Mittelwert durch $\mu_{t_1, \dots, t_n} = (\mathbf{E}X(t_1), \dots, \mathbf{E}X(t_n))^\top$ und die Kovarianzmatrix durch $\sum_{t_1, \dots, t_n} = ((\text{cov}(X(t_i), X(t_j)))_{i,j=1}^n$ gegeben ist.

Aufgabe 1.2.1

Zeigen Sie, dass die Verteilung einer Gauß'schen zufälligen Funktion X eindeutig durch ihre Mittelwertfunktion $\mu(t) = \mathbf{E}X(t)$, $t \in T$, bzw. Kovarianzfunktion $C(s, t) = \mathbf{E}[X(s)X(t)]$, $s, t \in T$, bestimmt wird.

Als Beispiel eines Gauß'schen Prozesses kann der sog. *Wiener-Prozess* (oder *Brown'sche Bewegung*) $X = \{X(t), t \geq 0\}$ dienen, der den Erwartungswert Null ($\mu(t) \equiv 0, t \geq 0$) und die Kovarianzfunktion $C(s, t) = \min\{s, t\}$, $s, t \geq 0$ hat. Normalerweise fordert man zusätzlich, dass die Pfade von X stetige Funktionen sind.

Die Regularitätseigenschaften der Pfade von zufälligen Funktionen werden wir detaillierter im Abschnitt 1.3 erforschen. Jetzt können wir sagen, dass ein solcher Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 (mit fast sicher stetigen Trajektorien) existiert.

Aufgabe 1.2.2

Zeigen Sie, dass Gauß'sches Weißes Rauschen eine Gauß'sche Zufallsfunktion ist.

3. Lognormal- und χ^2 -Funktionen:

Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt *lognormal*, falls $X(t) = e^{Y(t)}$, wobei $Y = \{Y(t), t \in T\}$ eine Gauß'sche zufällige Funktion ist. X heißt χ^2 -Funktion, falls $X(t) = \|Y(t)\|^2$, wobei $Y = \{Y(t), t \in T\}$ eine Gauß'sche zufällige Funktion mit Werten in \mathbb{R}^n ist, für die $Y(t) \sim \mathcal{N}(0, I)$, $t \in T$; hier ist I die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix. Es gilt dann $X(t) \sim \chi_n^2$, $t \in T$.

4. Kosinus-Welle:

$X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ wird definiert durch $X(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi Y + tZ)$, wobei $Y \sim \mathcal{U}([0, 1])$ und Z eine Zufallsvariable ist, die von Y unabhängig ist.

Aufgabe 1.2.3

Seien X_1, X_2, \dots u.i.v. Kosinus-Wellen. Bestimmen Sie den schwachen Grenzwert der endlich-dimensionalen Verteilungen der zufälligen Funktion $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k(t), t \in \mathbb{R} \right\}$ für $n \rightarrow \infty$.

5. Poisson-Prozess:

Sei $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen $Y_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Der stochastische Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definiert als $X(t) = \max \{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n Y_k \leq t\}$ heißt *Poisson-Prozess* mit Intensität $\lambda > 0$. $X(t)$ zählt die Anzahl gewisser Ereignisse bis zum Zeitpunkt $t > 0$, wobei das typische Intervall zwischen zwei solchen Ereignissen eine $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung besitzt. Diese Ereignisse können z.B. eine Schadensmeldung eines Versicherers, das Registrieren eines Elementarteilchens im Geigerzähler, usw. sein. Dann ist $X(t)$ die Schaden- bzw. Teilchenanzahl im Zeitintervall $[0, t]$.

1.3 Regularitätseigenschaften von Trajektorien

Der Satz von Kolmogorov gibt die Existenz der Verteilung einer zufälligen Funktion mit vorgegebenen endlich-dimensionalen Verteilungen an. Jedoch er sagt nichts über die Pfadeneigenschaften von X aus. Dies ist auch verständlich, denn alle zufälligen Objekte sind in der Wahrscheinlichkeitstheorie im fast sicheren Sinne (f.s.) definiert, also bis auf eine Menge $A \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) = 0$.

Beispiel 1.3.1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \nu_1)$, wobei ν_1 das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$ ist. Definieren wir $\{X = X(t), t \in [0, 1]\}$ durch $X(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$ und $Y = \{Y(t), t \in [0, 1]\}$ durch

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & t = U, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $U(\omega) = \omega$, $\omega \in [0, 1]$, eine $\mathcal{U}([0, 1])$ -verteilte Zufallsvariable definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist. Da $\mathbb{P}(Y(t) = 0) = 1$, $t \in T$, ist, weil $\mathbb{P}(U = t) = 0$, $t \in T$, ist es klar, dass $X \stackrel{d}{=} Y$. Dennoch besitzen X und Y unterschiedliche Pfadeneigenschaften, da X stetige und Y sprunghafte Trajektorien hat, und $\mathbb{P}(X(t) = 0, \forall t \in T) = 1$, wobei $\mathbb{P}(Y(t) = 0, \forall t \in T) = 0$.

Es kann sein, dass die „Ausnahmemenge“ A (siehe oben) für $X(t)$ für jedes $t \in T$ sehr unterschiedlich ist. Deshalb fordert man, dass alle $X(t)$, $t \in T$, simultan auf einer Teilmenge $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ definiert sind. Die so definierte zufällige Funktion $\tilde{X} : \Omega_0 \times T \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Modifikation* von $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$. X und \tilde{X} unterscheiden sich auf einer Menge Ω/Ω_0 von Wahrscheinlichkeit Null. Deshalb meinen wir später, wenn wir sagen, dass „Zufällige Funktion X eine Eigenschaft C besitzt“ dass eine Modifikation von X mit dieser Eigenschaft C existiert.

Definition 1.3.1

Die zufälligen Funktionen $X = \{X(t), t \in T\}$ und $Y = \{Y(t), t \in T\}$ definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißen (*stochastisch äquivalent*), falls

$$B_t = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) \neq Y(\omega, t)\} \in \mathcal{A}, \quad t \in T,$$

und $\mathbb{P}(B_t) = 0, t \in T$.

Man sagt auch, dass X und Y Versionen einer und derselben zufälligen Funktion sind. Es ist klar, dass alle Modifikationen (oder Versionen) von X äquivalent zu X sind.

Aufgabe 1.3.1

Beweisen Sie, dass die zufälligen Funktionen X und Y im Beispiel 1.3.1 stochastisch äquivalent sind.

Definition 1.3.2

Die zufälligen Funktionen $X = \{X(t), t \in T\}$ und $Y = \{Y(t), t \in T\}$ (nicht unbedingt auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert) heißen *äquivalent in Verteilung*, falls $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ auf $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)$. Bezeichnung: $X \stackrel{d}{=} Y$.

Nach dem Satz 1.1.2 ist es ausreichend für die Äquivalenz in Verteilung von X und Y , wenn sie dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen besitzen. Es ist klar, dass die stochastische Äquivalenz die Äquivalenz in Verteilung impliziert, jedoch nicht umgekehrt.

Definition 1.3.3

Die zufälligen Funktionen $X = \{X(t), t \in T\}$ und $Y = \{Y(t), t \in T\}$ definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ assoziiert mit $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ haben *äquivalente Trajektorien* (oder heißen auch *stochastisch ununterscheidbar*), falls

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) \neq Y(\omega, t) \text{ für ein } t \in T\} \in \mathcal{A}$$

und $\mathbb{P}(A) = 0$.

Dieser Begriff bedeutet, dass X und Y Pfade haben, die mit Wahrscheinlichkeit 1 übereinstimmen. Falls der Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *vollständig* ist (d.h. aus $A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) = 0$ folgt für alle $B \subset A : B \in \mathcal{A}$ (und dann $\mathbb{P}(B) = 0$)), dann sind ununterscheidbare Prozesse stochastisch äquivalent.

Seien nun T und \mathcal{S} *Banach-Räume* mit den Normen $|\cdot|_T$ bzw. $|\cdot|_{\mathcal{S}}$. Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ sei nun auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert mit Werten in $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$.

Definition 1.3.4

Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt

- a) *stochastisch stetig auf T* , falls $X(s) \xrightarrow{s \rightarrow t}^{\mathbb{P}} X(t)$, für beliebige $t \in T$, d.h.

$$\mathbb{P}(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}} > \varepsilon) \xrightarrow{s \rightarrow t} 0, \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

- b) *L^p -stetig auf T* , $p \geq 1$, falls $X(s) \xrightarrow{s \rightarrow t}^{L^p} X(t)$, $t \in T$, d.h. $\mathbb{E}|X(s) - X(t)|^p \xrightarrow{s \rightarrow t} 0$. Für $p = 2$ benutzt man die spezielle Bezeichnung „Stetigkeit im quadratischen Mittel“.

- c) *f.s. stetig auf T* , falls $X(s) \xrightarrow{s \rightarrow t}^{f.s.} X(t)$, $t \in T$, d.h., $\mathbb{P}(X(s) \xrightarrow{s \rightarrow t} X(t)) = 1, t \in T$.

d) *stetig*, falls alle Trajektorien von X stetige Funktionen sind.

In Anwendungen interessiert man sich für die Fälle c) und d), obwohl die schwächste Form der Stetigkeit die stochastische Stetigkeit ist.

$$\boxed{L^p\text{-Stetigkeit}} \implies \boxed{\text{Stochastische Stetigkeit}} \iff \boxed{\text{f.s. Stetigkeit}} \iff \boxed{\text{Stetigkeit aller Pfade}}$$

Warum sind Fälle c) und d) wichtig? Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 1.3.2

Sei $T = [0, 1]$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein kanonischer Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \mathbb{R}^{[0,1]}$, d.h. $\Omega = \prod_{t \in [0,1]} \mathbb{R}$. Sei $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nicht alle Ereignisse sind aber Elemente von \mathcal{A} , wie z.B. $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) = 0 \text{ für alle } t \in [0, 1]\} = \bigcap_{t \in [0,1]} \{X(\omega, t) = 0\}$, weil dies ein Schnitt von messbaren Ereignissen aus \mathcal{A} in überzählbarer Anzahl ist. Falls allerdings X stetig ist, dann sind auch alle seine Pfade stetige Funktionen und man kann $A = \bigcap_{t \in D} \{X(\omega, t) = 0\}$ darstellen lassen, wobei D eine dichte abzählbare Teilmenge von $[0, 1]$ ist, z.B., $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Dann gilt aber $A \in \mathcal{A}$.

Es ist allerdings in vielen Anwendungen (wie z.B. in der Finanzmathematik) nicht realistisch, stochastische Prozesse mit stetigen Pfaden als Modelle für reale Phänomene zu betrachten. Deshalb wird eine größere Klasse von möglichen Trajektorien von X erlaubt: die sog. *càdlàg-Klasse* (*càdlàg* = *continue à droite, limitée à gauche* (fr.)).

Definition 1.3.5

Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ heißt *càdlàg*, wenn alle seine Trajektorien rechtsseitig stetige Funktionen sind, die linksseitige Grenzwerte besitzen.

Jetzt wollen wir die Eigenschaften der oben eingeführten Stetigkeitsbegriffen näher betrachten. Es stellt sich z.B. fest, dass die stochastische Stetigkeit eine Eigenschaft der zweidimensionalen Verteilung $\mathbb{P}_{s,t}$ von X ist, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 1.3.1

Sei $X = \{X(t), t \in T\}$ eine zufällige Funktion assoziiert mit $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, wobei \mathcal{S} und T Banach-Räume sind. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $X(s) \xrightarrow[s \rightarrow t_0]{\mathbb{P}} Y$,
- $\mathbb{P}_{s,t} \xrightarrow[s,t \rightarrow t_0]{d} \mathbb{P}_{(Y,Y)}$,

wobei $t_0 \in T$ und Y ein \mathcal{B} -Zufallselement ist. Für die stochastische Stetigkeit von X sollen $t_0 \in T$ beliebig und $Y = X(t_0)$ gewählt werden.

Beweis a) \Rightarrow b)

$X(s) \xrightarrow[s \rightarrow t_0]{\mathbb{P}} Y$ bedeutet $(X(s), X(t))^\top \xrightarrow[s,t \rightarrow t_0]{\mathbb{P}} (Y, Y)^\top$. Daraus folgt $\mathbb{P}_{s,t} \xrightarrow{d} \mathbb{P}_{(Y,Y)}$, weil $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ -

Konvergenz strenger als \xrightarrow{d} -Konvergenz ist.

b) \Rightarrow a)

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ betrachten wir eine stetige Funktion $g_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $g_\varepsilon(0) = 0$, $g_\varepsilon(x) = 1$, $x \notin B_\varepsilon(0)$. Es gilt für alle $s, t \in T$, dass

$$\mathbb{E}g_\varepsilon(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}}) = \mathbb{P}(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}} > \varepsilon) + \mathbb{E}(g_\varepsilon(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}}) \mathbb{E}(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}} | \leq \varepsilon)),$$

daher $\mathbb{P}(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}} > \varepsilon) \leq \mathbb{E}g_\varepsilon(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}}) = \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} g_\varepsilon(|x - y|_{\mathcal{S}}) \mathbb{P}_{s,t}(d(x, y)) \xrightarrow[s \rightarrow t_0]{t \rightarrow t_0} \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} g_\varepsilon(|x - y|_{\mathcal{S}}) \mathbb{P}_{(Y,Y)}(d(x, y)) = 0$, weil $\mathbb{P}_{(Y,Y)}$ auf $\{(x, y) \in \mathcal{S}^2 : x = y\}$ konzentriert ist und $g_\varepsilon(0) = 0$. Daher ist $\{X(s)\}_{s \rightarrow t_0}$ eine fundamentale Folge (in Wahrscheinlichkeit), weshalb $X(s) \xrightarrow[s \rightarrow t_0]{\mathbb{P}} Y$. \square

Es kann sein, dass X stochastisch stetig ist, obwohl alle Pfade von X Sprünge haben, d.h. X kann keine f.s. stetige Modifikation besitzen. Die anschauliche Erklärung dessen ist, dass solche X mit Wahrscheinlichkeit Null einen Sprung für konkretes $t \in T$ haben können. Deshalb treten Sprünge der Pfade von X immer an anderen Stellen $t \in T$ auf.

Aufgabe 1.3.2

Zeigen Sie, dass der Poisson-Prozess stochastisch stetig ist, obwohl er keine f.s. stetige Modifikation besitzt.

Aufgabe 1.3.3

Sei T kompakt. Zeigen Sie, dass falls X stochastisch stetig auf T ist, dann ist es auch gleichmäßig stochastisch stetig, d.h., für alle $\varepsilon, \eta > 0 \exists \delta > 0$, so dass für alle $s, t \in T$ mit $|s - t|_T < \delta$ gilt: $\mathbb{P}(|X(s) - X(t)|_{\mathcal{S}} > \varepsilon) < \eta$.

Nun sei $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, $\mathbb{E}X^2(t) < \infty$, $t \in T$, $\mathbb{E}X(t) = 0$, $t \in T$. Sei $C(s, t) = \mathbb{E}[X(s)X(t)]$ die Kovarianzfunktion von X .

Lemma 1.3.2

Für alle $t_0 \in T$ und eine Zufallsvariable Y mit $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ sind folgende Behauptungen äquivalent:

- a) $X(s) \xrightarrow[s \rightarrow t_0]{L^2} Y$
- b) $C(s, t) \xrightarrow[s, t \rightarrow t_0]{} \mathbb{E}Y^2$

Beweis a) \Rightarrow b)

Die Behauptung folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} |C(s, t) - \mathbb{E}Y^2| &= |\mathbb{E}(X(s)X(t)) - \mathbb{E}Y^2| = |\mathbb{E}[(X(s) - Y + Y)(X(t) - Y + Y)] - \mathbb{E}Y^2| \\ &\leq \mathbb{E}|(X(s) - Y)(X(t) - Y)| + \mathbb{E}|(X(s) - Y)Y| + \mathbb{E}|(X(t) - Y)Y| \\ &\leq \sqrt{\underbrace{\mathbb{E}(X(s) - Y)^2}_{\|X(s)-Y\|_{L^2}^2}} \sqrt{\mathbb{E}(X(t) - Y)^2} \\ &\quad + \sqrt{\frac{\mathbb{E}Y^2 \mathbb{E}(X(s) - Y)^2}{\|X(s)-Y\|_{L^2}^2}} + \sqrt{\frac{\mathbb{E}Y^2 \mathbb{E}(X(t) - Y)^2}{\|X(t)-Y\|_{L^2}^2}} \xrightarrow[s, t \rightarrow t_0]{} 0 \end{aligned}$$

nach Voraussetzung a).

b) \Rightarrow a)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(s) - X(t))^2 &= \mathbb{E}(X(s))^2 - 2\mathbb{E}[X(s)X(t)] + \mathbb{E}(X(t))^2 \\ &= C(s, s) + C(t, t) - 2C(s, t) \xrightarrow[s, t \rightarrow t_0]{} 2\mathbb{E}Y^2 - 2\mathbb{E}Y^2 = 0. \end{aligned}$$

Daher ist $\{X(s), s \rightarrow t_0\}$ eine fundamentale Folge im L^2 -Sinne, und es folgt $X(s) \xrightarrow[s \rightarrow t_0]{L^2} Y$. \square

Eine zufällige Funktion X , die stetig im mittleren quadratischen Sinne ist, kann immer noch unstetige Trajektorien besitzen. In den meisten Fällen, die praktische Relevanz besitzen, hat X jedoch eine f.s. stetige Modifikation. Dies werden wir später in Form eines Satzes präziser machen.

Folgerung 1.3.1

Die zufällige Funktion X , die den Voraussetzungen des Lemmas 1.3.2 genügt, ist stetig auf T im mittleren quadratischen Sinne genau dann, wenn ihre Kovarianzfunktion $C : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf der Diagonalen $\text{diag } T^2 = \{(s, t) \in T^2 : s = t\}$ ist, d.h., $\lim_{s, t \rightarrow t_0} C(s, t) = C(t)$ für alle $t_0 \in T$.

Beweis Wähle $Y = X(t_0)$ in Lemma 1.3.2. □

Bemerkung 1.3.1

Falls X nicht zentriert ist, dann fordert man die Stetigkeit von $\mu(\cdot)$ zusammen mit der Stetigkeit von C auf $\text{diag } T^2$, um die L^2 -Stetigkeit von X auf T zu gewährleisten.

Aufgabe 1.3.4

Geben Sie ein Beispiel eines stochastischen Prozesses mit f.s. unstetigen Trajektorien, der L^2 -stetig ist.

Nun betrachten wir die Eigenschaft der (f.s.) Stetigkeit etwas näher. Wie vorher erwähnt, können wir lediglich von einer stetigen Modifikation oder Version eines Prozesses sprechen. Die Möglichkeit, eine solche Version zu besitzen, hängt ebenso von den Eigenschaften der zweidimensionalen Verteilungen des Prozesses ab, wie folgender Satz (ursprünglich bewiesen von A. Kolmogorov) zeigt.

Theorem 1.3.1

Sei $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, ein reellwertiger stochastischer Prozess X hat eine stetige Version, falls es Konstanten $\alpha, c, \delta > 0$ gibt, so dass

$$\mathbb{E}|X(t+h) - X(t)|^\alpha < c|h|^{1+\delta}, \quad t \in (a, b), \quad (1.3.1)$$

für ausreichend kleine $|h|$.

Beweis Siehe, z.B. [7], Theorem 2.23. □

Nun wenden wir uns den Prozessen mit càdlàg-Trajektorien zu. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Theorem 1.3.2

Sei $X = \{X(t), t \geq 0\}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess und D eine abzählbare dichte Teilmenge von $[0, \infty)$. Falls

- a) X stochastisch rechtsseitig stetig ist, d.h., $X(t+h) \xrightarrow[h \rightarrow +0]{\mathbb{P}} X(t)$, $t \in [0, +\infty)$,
- b) die Trajektorien von X für jedes $t \in D$ endliche rechts- und linksseitige Grenzwerte haben, d.h., $\exists \lim_{h \rightarrow \pm 0} X(t+h)$, $t \in D$ f.s.,

dann hat X eine Version mit f.s. càdlàg-Pfaden.

Ohne Beweis.

Lemma 1.3.3

Seien $X = \{X(t), t \geq 0\}$ und $\{Y = Y(t), t \geq 0\}$ zwei Versionen einer zufälligen Funktion, beide definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mit der Eigenschaft, dass X und Y f.s. rechtsseitig stetige Trajektorien haben. Dann sind X und Y ununterscheidbar.

Beweis Seien Ω_X, Ω_Y „Ausnahmemengen“, für die die Trajektorien von X bzw. von Y nicht rechtsseitig stetig sind. Es gilt $\mathbb{P}(\Omega_X) = \mathbb{P}(\Omega_Y) = 0$. Betrachte $A_t = \{\omega \in \Omega : X(\omega, t) \neq Y(\omega, t)\}$, $t \in [0, +\infty)$ und $A = \cup_{t \in \mathbb{Q}_+} A_t$, wobei $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$. Da X und Y stochastisch äquivalent sind, gilt $\mathbb{P}(A) = 0$ und deshalb $\mathbb{P}(\tilde{A}) = \mathbb{P}(A \cup \Omega_X \cup \Omega_Y) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\Omega_X) + \mathbb{P}(\Omega_Y) = 0$, wobei $\tilde{A} = A \cup \Omega_X \cup \Omega_Y$. Somit gilt $X(\omega, t) = Y(\omega, t)$ für $t \in \mathbb{Q}_+$ und $\omega \in \Omega \setminus \tilde{A}$. Wir beweisen dies nun für alle $t \geq 0$. Für beliebiges $t \geq 0$ existiert eine Folge $\{t_n\} \subset \mathbb{Q}_+$, so dass $t_n \downarrow t$. Da $X(\omega, t_n) = Y(\omega, t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega \setminus \tilde{A}$, gilt $X(\omega, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(\omega, t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y(\omega, t_n) = Y(\omega, t)$ für $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega \setminus \tilde{A}$. Deshalb sind X und Y ununterscheidbar. \square

Folgerung 1.3.2

Falls càdlàg-Prozesse $X = \{X(t), t \geq 0\}$ und $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ Versionen einer zufälligen Funktion sind, dann sind sie ununterscheidbar.

1.4 Differenzierbarkeit von Trajektorien

Sei T ein linearer normierter Raum.

Definition 1.4.1

Eine reellwertige zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ ist *differenzierbar auf T in Richtung $h \in T$ stochastisch, im L^p -Sinne, $p \geq 1$, oder f.s., falls es*

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{X(t+hl) - X(t)}{l} = X'_h(t), \quad t \in T$$

existiert im entsprechenden Sinne, also stochastisch, im L^p -Raum oder f.s..

Die Lemmata 1.3.2 - 1.3.3 zeigen, dass die stochastische Differenzierbarkeit eine Eigenschaft ist, die durch dreidimensionale Verteilungen von X bestimmt ist (weil die gemeinsame Verteilung von $\frac{X(t+hl) - X(t)}{l}$ und $\frac{X(t+hl') - X(t)}{l'}$ schwach konvergieren soll), wobei die Differenzierbarkeit im mittleren quadratischen Sinne durch die Glattheit der Kovarianzfunktion $C(s, t)$ bestimmt wird.

Aufgabe 1.4.1

Zeigen Sie, dass

1. der Wiener-Prozess nicht stochastisch differenzierbar auf $[0, \infty)$ ist.
2. der Poisson-Prozess stochastisch differenzierbar auf $[0, \infty)$ ist, jedoch nicht im L^p -Mittel, $p \geq 1$.

Lemma 1.4.1

Eine zentrierte zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ (d.h., $\mathbb{E}X(t) \equiv 0$, $t \in T$), ist L^2 -differenzierbar in $t \in T$ in Richtung $h \in T$, falls ihre Kovarianzfunktion C zweimal differenzierbar in (t, t) in Richtung h ist, d.h., falls $C''_{hh}(t, t) = \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s_h \partial t_h} \Big|_{s=t}$. $X'_h(t)$ ist L^2 -stetig in

$t \in T$, falls $C''_{hh}(s, t) = \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s_h \partial t_h}$ stetig in $s = t$ ist. Daher ist $C''_{hh}(s, t)$ die Kovarianzfunktion von $X'_h = \{X'_h(t), t \in T\}$.

Beweis Nach Lemma 1.3.3 reicht es zu zeigen, dass

$$I = \lim_{l, l' \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{X(t+lh) - X(t)}{l} \cdot \frac{X(s+l'h) - X(s)}{l'} \right)$$

existiert für $s = t$. In der Tat erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{ll'} \left(C(t+lh, s+l'h) - C(t+lh, s) - C(t, s+l'h) + C(t, s) \right) \\ &= \frac{1}{l} \left(\frac{C(t+lh, s+l'h) - C(t+lh, s)}{l'} - \frac{C(t, s+l'h) - C(t, s)}{l'} \right) \xrightarrow{l, l' \rightarrow 0} C''_{hh}(s, t). \end{aligned}$$

Alle anderen Aussagen des Lemmas folgen aus dieser Relation. \square

Bemerkung 1.4.1

Die Eigenschaften der L^2 -Differenzierbarkeit und der f.s. Differenzierbarkeit von zufälligen Funktionen sind definiert im folgenden Sinne: es gibt stochastische Prozesse, die L^2 -differenzierbare Pfade haben, obwohl sie f.s. unstetig sind, und umgekehrt sind Prozesse mit f.s. differenzierbaren Pfaden nicht immer L^2 -differenzierbar, weil z.B. die erste Ableitung ihrer Kovarianzfunktion nicht stetig ist.

Aufgabe 1.4.2

Geben Sie entsprechende Beispiele an!

1.5 Momente und Kovarianz

Sei $X = \{X(t), t \in T\}$ eine zufällige Funktion, die reellwertig ist, und sei T ein beliebiger Indexraum.

Definition 1.5.1

Das *gemischte Moment* $\mu^{(j_1, \dots, j_n)}(t_1, \dots, t_n)$ von X der Ordnung $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, $t_1, \dots, t_n \in T$ ist gegeben durch $\mu^{(j_1, \dots, j_n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}[X^{j_1}(t_1) \cdot \dots \cdot X^{j_n}(t_n)]$, vorausgesetzt, dass dieser Erwartungswert existiert und endlich ist. Dann ist es ausreichend vorauszusetzen, dass $\mathbb{E}|X(t)|^j < \infty$ für alle $t \in T$ und $j = j_1 + \dots + j_n$.

Wichtige Spezialfälle:

1. $\mu(t) = \mu^{(1)}(t) = \mathbb{E}X(t)$, $t \in T$ – *Mittelwertfunktion von X .*
2. $\mu^{(1,1)}(s, t) = \mathbb{E}[X(s)X(t)] = C(s, t)$ – *(nicht-zentrierte) Kovarianzfunktion von X .* Sie ist zu unterscheiden von der *zentrierten Kovarianzfunktion*: $K(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t)) = \mu^{(1,1)}(s, t) - \mu(s)\mu(t)$, $s, t \in T$.

Aufgabe 1.5.1

Zeigen Sie, dass die zentrierte Kovarianzfunktion einer reellwertigen zufälligen Funktion X

1. *symmetrisch* ist, d.h., $K(s, t) = K(t, s)$, $s, t \in T$.

2. *positiv semidefinit* ist, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$, $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^n K(t_i, t_j) z_i z_j \geq 0.$$

3. $K(t, t) = \text{var } X(t)$ erfüllt, $t \in T$.

Die Eigenschaft 2) gilt auch für die nicht-zentrierte Kovarianzfunktion $C(s, t)$.

Die Mittelwertfunktion $\mu(t)$ zeigt einen (nicht zufälligen) Trend dar. Falls sie bekannt ist, kann die zufällige Funktion X zentriert werden, indem man eine zufällige Funktion $Y = \{Y(t), t \in T\}$ mit $Y(t) = X(t) - \mu(t)$, $t \in T$ betrachtet.

Die Kovarianzfunktion $K(s, t)$ bzw. $C(s, t)$ enthält Informationen über die Abhängigkeitsstruktur von X . Manchmal wird statt K bzw. C die Korrelationsfunktion $R(s, t) = \frac{K(s, t)}{\sqrt{K(s, s)K(t, t)}}$ verwendet, für alle $s, t \in T$: $K(s, s) = \text{var } X(s) > 0$, $K(t, t) = \text{var } X(t) > 0$. Durch die Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt $|R(s, t)| \leq 1$, $s, t \in T$. Die Menge aller gemischten Momente legt die Verteilung einer zufälligen Funktion im Allgemeinen nicht (eindeutig) fest.

Aufgabe 1.5.2

Geben Sie Beispiele von verschiedenen zufälligen Funktionen $X = \{X(t), t \in T\}$ und $Y = \{Y(t), t \in T\}$, für die gilt $\mathbf{E}X(t) = \mathbf{E}Y(t)$, $t \in T$ und $\mathbf{E}(X(s)X(t)) = \mathbf{E}(Y(s)Y(t))$, $s, t \in T$.

Aufgabe 1.5.3

Sei $\mu : T \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $K : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv semidefinite symmetrische Funktion. Zeigen Sie, dass eine zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ existiert mit $\mathbf{E}X(t) = \mu(t)$, $\text{cov}(X(s), X(t)) = C(s, t)$, $s, t \in T$.

Sei nun $X = \{X(t), t \in T\}$ eine reellwertige zufällige Funktion mit $\mathbf{E}|X(t)|^k < \infty$, $t \in T$, für ein $k \in \mathbb{N}$.

Definition 1.5.2

Der *mittlere Zuwachs der Ordnung k* von X ist gegeben durch $\gamma_k(s, t) = \mathbf{E}(X(s) - X(t))^k$, $s, t \in T$.

Besondere Aufmerksamkeit gilt der Funktion $\gamma(s, t) = \frac{1}{2}\gamma_2(s, t) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(X(s) - X(t))^2$, $s, t \in T$, die *Variogramm von X* genannt wird. Das Variogramm wird in Geostatistik oft an Stelle der Kovarianzfunktion benutzt. Oft wird dafür die Bedingung $\mathbf{E}X^2(t) < \infty$, $t \in T$ nicht gestellt, sondern es wird vorausgesetzt, dass $\gamma(s, t) < \infty$ für alle $s, t \in T$.

Aufgabe 1.5.4

Zeigen Sie, dass es zufällige Funktion ohne endlichen 2. Momenten mit $\gamma(s, t) < \infty$, $s, t \in T$ gibt.

Aufgabe 1.5.5

Zeigen Sie, dass für eine zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ mit Mittelwertfunktion μ und Kovarianzfunktion K gilt:

$$\gamma(s, t) = \frac{K(s, s) + K(t, t)}{2} - K(s, t) + \frac{1}{2}(\mu(s) - \mu(t))^2, \quad s, t \in T.$$

Falls die zufällige Funktion X *komplexwertig* ist, d.h., $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{C}$, mit $\mathbf{E}|X(t)|^2 < \infty$, $t \in T$, dann wird die Kovarianzfunktion von X als $K(s, t) = \mathbf{E}(X(s) - \mathbf{E}X(s))(\overline{X(t) - \mathbf{E}X(t)})$,

$s, t \in T$, eingeführt, wobei \bar{z} das Komplex-konjugierte von $z \in \mathbb{C}$ ist. Es gilt dann $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in T$, und K ist positiv semidefinit, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$, $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ gilt $\sum_{i,j=1}^n K(t_i, t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$.

1.6 Stationarität und Unabhängigkeit

Sei T eine Teilmenge vom linearen Vektorraum mit Operationen $+$, $-$ über den Raum \mathbb{R} .

Definition 1.6.1

Die zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt *stationär* (im engen Sinne), falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $h, t_1, \dots, t_n \in T$ mit $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$ gilt:

$$P_{(X(t_1), \dots, X(t_n))} = P_{(X(t_1+h), \dots, X(t_n+h))},$$

d.h., alle endlich-dimensionalen Verteilungen von X sind invariant gegenüber Verschiebungen in T .

Definition 1.6.2

Eine (komplexwertige) zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ heißt *stationär 2. Ordnung* (oder *im weiten Sinne*), falls $E|X(t)|^2 < \infty$, $t \in T$, und $\mu(t) \equiv EX(t) \equiv \mu$, $t \in T$, $K(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t)) = K(s+h, t+h)$ für alle $h, s, t \in T : s+h, t+h \in T$.

Falls X stationär 2. Ordnung ist, ist es günstig eine Funktion $K(t) := K(0, t)$, $t \in T$, einzuführen, wobei $0 \in T$ ist.

Stationarität im engen Sinne und 2. Ordnung folgen nicht aus einander. Es ist jedoch klar, dass, wenn eine komplexwertige zufällige Funktion stationär im engen Sinne ist und endliche 2. Momente besitzt, dann ist sie auch stationär 2. Ordnung.

Definition 1.6.3

Eine reellwertige zufällige Funktion $X = \{X(t), t \in T\}$ ist *intrinsisch stationär 2. Ordnung*, falls $\gamma_k(s, t)$, $s, t \in T$ existieren für $k \leq 2$, und es gilt für alle $s, t, h \in T$, $s+h, t+h \in T$, dass $\gamma_1(s, t) = 0$, $\gamma_2(s, t) = \gamma_2(s+h, t+h)$.

Die intrinsische Stationarität 2. Ordnung ist für reellwertige zufällige Funktionen etwas allgemeiner als Stationarität 2. Ordnung, da die Existenz von $E|X(t)|^2$, $t \in T$, nicht gefordert wird.

Es gibt aber auch das Analogon der Stationarität der Zuwächse von X im engen Sinne.

Definition 1.6.4

Sei $X = \{X(t), t \in T\}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess, $T \subset \mathbb{R}$. Man sagt, dass X

1. *stationäre Zuwächse* besitzt, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $h, t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, mit $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_i + h \in T$, $i = 0, \dots, n$ die Verteilung von $(X(t_1 + h) - X(t_0 + h), \dots, X(t_n + h) - X(t_{n-1} + h))^T$ nicht von h abhängt.
2. *unabhängige Zuwächse* besitzt, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \dots, t_n \in T$ mit $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ die Zufallsvariablen $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ paarweise unabhängig.

Seien $(\mathcal{S}_1, \mathcal{B}_1)$ und $(\mathcal{S}_2, \mathcal{B}_2)$ meßbare Räume. Generell sagt man, dass zwei zufällige Elemente $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}_1$ und $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}_2$ auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) *unabhängig* sind, wenn $P(X \in A_1, Y \in A_2) = P(X \in A_1)P(Y \in A_2)$ für alle $A_1 \in \mathcal{B}_1$, $A_2 \in \mathcal{B}_2$.

Diese Definition läßt sich übertragen auf die Unabhängigkeit von zufälligen Funktionen X und Y mit dem Phasenraum $(\mathcal{S}_T, \mathcal{B}_T)$, da sie als zufällige Elemente angesehen werden können, mit $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_T$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_T$ (vgl. Lemma 1.1.1). Dasselbe gilt für die Unabhängigkeit eines zufälligen Elementes (bzw. einer zufälligen Funktion) X und einer Teil- σ -Algebra $\mathcal{G} \in \mathcal{A}$: dies ist der Fall, wenn $P(\{X \in A\} \cap G) = P(X \in A)P(G)$, für alle $A \in \mathcal{B}_1$, $G \in \mathcal{G}$ (bzw. $A \in \mathcal{B}_T$, $G \in \mathcal{G}$).

1.7 Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen

In diesem Abschnitt wollen wir auf die Eigenschaften und Existenz der Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen eingehen.

Sei $\{\varphi_{s,t}, s, t \geq 0\}$ eine Familie von charakteristischen Funktionen der Wahrscheinlichkeitsmaße $Q_{s,t}$, $s, t \geq 0$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, d.h., für $z \in \mathbb{R}$, $s, t \geq 0$ gilt $\varphi_{s,t}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q_{s,t}(dx)$.

Theorem 1.7.1

Es existiert ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit unabhängigen Zuwächsen mit der Eigenschaft, dass für alle $s, t \geq 0$ die charakteristische Funktion von $X(t) - X(s)$ gleich $\varphi_{s,t}$ ist, genau dann, wenn

$$\varphi_{s,t} = \varphi_{s,u} \varphi_{u,t} \tag{1.7.1}$$

für alle $0 \leq s < u < t < \infty$. Dabei kann die Verteilung von $X(0)$ beliebig gewählt werden.

Beweis Die Notwendigkeit der Bedingung 1.7.1 ist klar, weil für alle $s \in (0, \infty) : s < u < t$ gilt: $X(t) - X(s) = \underbrace{X(t) - X(u)}_{Y_1} + \underbrace{X(u) - X(s)}_{Y_2}$ und $X(t) - X(u)$ und $X(u) - X(s)$ sind paarweise

unabhängig. Dann gilt $\varphi_{s,t} = \varphi_{Y_1+Y_2} = \varphi_{Y_1} \varphi_{Y_2} = \varphi_{s,u} \varphi_{u,t}$.

Nun beweisen wir die Suffizienz.

Falls die Existenz eines Prozesses X mit unabhängigen Zuwächsen und Eigenschaft $\varphi_{X(t)-X(s)} = \varphi_{s,t}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) bereits bewiesen wäre, könnte man die charakteristischen Funktionen aller seiner endlich-dimensionalen Verteilungen wie folgt durch $\{\varphi_{s,t}\}$ angeben.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ und $Y = (X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}))^\top$. Aus der Unabhängigkeit der Zuwächse folgt

$$\varphi_Y(\underbrace{z_0, z_1, \dots, z_n}_z) = \mathbb{E}e^{i\langle z, Y \rangle} = \varphi_{X(t_0)}(z_0) \varphi_{t_0, t_1}(z_1) \dots \varphi_{t_{n-1}, t_n}(z_n), \quad z \in \mathbb{R}^{n+1},$$

wobei die Verteilung von $X(t_0)$ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß Q_0 auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. Für $X_{t_0, \dots, t_n} = (X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n))^\top$ gilt allerdings $X_{t_0, \dots, t_n} = AY$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\varphi_{X_{t_0, \dots, t_n}}(z) = \varphi_{AY}(z) = \mathbb{E}e^{i\langle z, AY \rangle} = \mathbb{E}e^{i\langle A^\top z, Y \rangle} = \varphi_Y(A^\top z)$. Deshalb hat die endlich-dimensionale Verteilung von X_{t_0, \dots, t_n} die charakteristische Funktion $\varphi_{X_{t_0, \dots, t_n}}(z) =$

$\varphi_{Q_0}(l_0)\varphi_{t_0,t_1}(l_1)\dots\varphi_{t_{n-1},t_n}(l_n)$, wobei $l = (l_1, l_1, \dots, l_n)^\top = A^\top z$, also

$$\begin{cases} l_0 &= z_0 + \dots + z_n \\ l_1 &= z_1 + \dots + z_n \\ &\vdots \\ l_n &= z_n \end{cases}$$

Dabei gilt $\varphi_{X(t_0)} = \varphi_{Q_0}$ und $\varphi_{X_{t_1, \dots, t_n}}(z_1, \dots, z_n) = \varphi_{X_{t_0, \dots, t_n}}(0, z_1, \dots, z_n)$ für alle $z_i \in \mathbb{R}$.
Nun beweisen wir die Existenz eines solchen Prozesses X .

Dabei konstruieren wir die Familie der charakteristischen Funktionen

$$\{\varphi_{t_0}, \varphi_{t_0, t_1, \dots, t_n}, \varphi_{t_1, \dots, t_n}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

aus φ_{Q_0} und $\{\varphi_{s,t}, 0 \leq s < t\}$ wie oben, also

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0} &= \varphi_{Q_0}, \quad \varphi_{t_1, \dots, t_n}(0, z_1, \dots, z_n) = \varphi_{t_0, t_1, \dots, t_n}(0, z_1, \dots, z_n), \quad z_i \in \mathbb{R}, \\ \varphi_{t_0, \dots, t_n}(z) &= \varphi_{t_0}(z_1 + \dots + z_n)\varphi_{t_0, t_1}(z_1 + \dots + z_n)\dots\varphi_{t_{n-1}, t_n}(z_n). \end{aligned}$$

Nun sollten wir prüfen, dass die Wahrscheinlichkeitsmaße, denen diese charakteristische Funktionen entsprechen, die Bedingungen des Theorems 1.1.2 erfüllen. Dies werden wir in äquivalenter Form tun, denn nach Aufgabe ... des Übungsblattes ... sind die Bedingungen der Symmetrie und der Konsistenz im Theorem 1.1.2 äquivalent zu:

- $\varphi_{t_{i_0}, \dots, t_{i_n}}(z_{i_0}, \dots, z_{i_n}) = \varphi_{t_0, \dots, t_n}(z_0, \dots, z_n)$ für eine beliebige Permutation $(0, 1, \dots, n) \mapsto (i_0, i_1, \dots, i_n)$,
- $\varphi_{t_0, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_n}(z_0, \dots, z_{m-1}, z_{m+1}, \dots, z_n) = \varphi_{t_0, \dots, t_n}(z_0, \dots, 0, \dots, z_n)$, für alle $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{R}, m \in \{1, \dots, n\}$.

Die erste Bedingung a) ist offensichtlich. Es gilt b), weil

$$\varphi_{t_{m-1}, t_m}(0 + z_{m+1} + \dots + z_n)\varphi_{t_m, t_{m+1}}(z_{m+1} + \dots + z_n) = \varphi_{t_{m-1}, t_{m+1}}(z_{m+1}, \dots, z_n)$$

für alle $m \in \{1, \dots, n\}$. Damit ist die Existenz von X bewiesen. \square

Beispiel 1.7.1 1. Falls $T = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann hat $X = \{X(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ unabhängige Zuwächse genau dann, wenn $X(n) \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^n Y_i$, wobei $\{Y_i\}$ unabhängige Zufallsvariablen sind und $Y_n \stackrel{d}{=} X(n) - X(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$. Ein solcher Prozess X heißt *zufällige Irrfahrt*. Er kann auch für Y_i mit Werten in \mathbb{R}^m definiert werden.

2. Der Poisson-Prozess mit Intensität λ hat unabhängige Zuwächse, wie wir es später zeigen werden.

3. Der Wiener-Prozess besitzt unabhängige Zuwächse.

Aufgabe 1.7.1

Beweisen Sie es!

Aufgabe 1.7.2

Sei $X = \{X(t), t \geq 0\}$ ein Prozess mit unabhängigen Zuwächsen und $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige (deterministische) Funktion. Zeigen Sie, dass der Prozess $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ mit $Y(t) = X(t) + g(t)$, $t \geq 0$, ebenso unabhängige Zuwächse besitzt.

1.8 Ergänzende Aufgaben

Aufgabe 1.8.1

Zeigen Sie die Existenz einer zufälligen Funktion, deren endlich-dimensionale Verteilungen multivariat normalverteilt sind, und geben Sie die messbaren Räume $(E_{t_1, \dots, t_n}, \mathcal{E}_{t_1, \dots, t_n})$ explizit an.

Aufgabe 1.8.2

Geben Sie ein Beispiel für eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen P_{t_1, \dots, t_n} , welche nicht die Bedingungen des Theorems von Kolmogorov erfüllt.

Aufgabe 1.8.3

Seien $X = \{X(t), t \in T\}$ und $Y = \{Y(t), t \in T\}$ zwei stochastische Prozesse, die auf dem selben vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) definiert sind und Werte in einem messbaren Raum (S, \mathcal{B}) annehmen.

- Beweisen Sie: X und Y sind stochastisch äquivalent $\implies P_X = P_Y$.
- Geben Sie ein Beispiel zweier Prozesse X und Y an, für die gilt: $P_X = P_Y$, aber X und Y sind nicht stochastisch äquivalent.
- Beweisen Sie: X und Y sind stochastisch ununterscheidbar $\implies X$ und Y sind stochastisch äquivalent.
- Beweisen Sie im Falle der Abzählbarkeit von T : X und Y sind stochastisch äquivalent $\implies X$ und Y sind stochastisch ununterscheidbar.
- Geben Sie im Falle der Überabzählbarkeit von T ein Beispiel zweier Prozesse X und Y an, für die gilt: X und Y sind stochastisch äquivalent, aber nicht stochastisch ununterscheidbar.

Aufgabe 1.8.4

Sei $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}\}$ ein Wiener-Prozess. Welche der folgenden Prozesse sind ebenfalls Wiener-Prozesse?

- $W_1 = \{W_1(t) := -W(t), t \in \mathbb{R}\}$,
- $W_2 = \{W_2(t) := \sqrt{t}W(1), t \in \mathbb{R}\}$,
- $W_3 = \{W_3(t) := W(2t) - W(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 1.8.5

Es sei der stochastische Prozess $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ gegeben, welcher aus identischen und unabhängig verteilten Zufallsvariablen mit einer Dichte $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, besteht. Zeigen Sie, dass ein solcher Prozess nicht stochastisch stetig in $t \in [0, 1]$ sein kann.

Aufgabe 1.8.6

Zeigen Sie:

- Falls man in Bedingung (1.3.1) die Variable $\delta = 0$ fixiert, dann reicht sie im Allgemeinen nicht zur Existenz einer stetigen Modifikation aus. *Tipp: Betrachten Sie den Poisson-Prozess.*
- Der Wiener-Prozess $W = \{W(t), t \in [0, \infty)\}$ besitzt eine stetige Modifikation. *Tipp: Betrachten Sie den Fall $\alpha = 4$.*

2 Zählprozesse

Hier werden einige Beispiele von stochastischen Prozessen betrachtet, die das Zählen von Ereignissen modellieren und daher stückweise konstante Pfade besitzen.

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine nichtfallende Folge von f.s. nicht-negativen Zufallsvariablen, d.h. $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$

Definition 2.0.1

Der stochastische Prozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ wird *Zählprozess* genannt, falls

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(S_n \leq t),$$

wobei $\mathbf{1}(A)$ die Indikatorfunktion eines Ereignisses $A \in \mathcal{A}$ ist.

$N(t)$ zählt die Ereignisse, die zu Zeitpunkten S_n bis zur Zeit t eintreten. S_n können z.B. Zeitpunkte des Eintretens

1. des n -ten Elementarteilchens im Geigerzähler sein, oder
2. eines Schadens in der Sachschadenversicherung, oder
3. eines Datenpakets beim Server in einem Computernetzwerk, usw.

Einen Spezialfall der Zählprozesse bilden die sog. *Erneuerungsprozesse*.

2.1 Erneuerungsprozesse

Definition 2.1.1

Sei $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. nicht-negativen Zufallsvariablen mit $P(T_1 > 0) > 0$. Ein Zählprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ mit $N(0) = 0$ f.s., $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$, $n \in \mathbb{N}$, wird *Erneuerungsprozess* genannt. Dabei heißt S_n der n -te *Erneuerungszeitpunkt*, $n \in \mathbb{N}$.

Den Namen „Erneuerungsprozess“ leitet man von folgender Interpretation ab. Die „Zwischenankunftszeiten“ T_n werden als Lebensdauer eines technischen Ersatzteils bzw. Mechanismus in einem System interpretiert, somit sind S_n die Zeitpunkte des n -ten Versagens des Systems. Das defekte Teil wird sofort durch ein neues baugleiches Teil ersetzt (wie z.B. beim Auswechseln einer kaputten Glühbirne). Somit ist $N(t)$ die Anzahl der Reparaturen (die sog. „Erneuerungen“) des Systems bis zur Zeit t .

Bemerkung 2.1.1 1. Man setzt $N(t) = \infty$, falls $S_n \leq t$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Oft wird vorausgesetzt, dass nur T_2, T_3, \dots identisch verteilt sind mit $ET_n < \infty$. Die Verteilung von T_1 ist dann beliebig wählbar. Ein solcher Prozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ wird *verzögerter Erneuerungsprozess* (mit Verzögerung T_1) genannt.
3. Manchmal wird die Forderung $T_n \geq 0$ weggelassen.

4. Es ist klar, dass $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $S_0 = 0$ f.s., $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$, $n \in \mathbb{N}$ eine *zufällige Irrfahrt* ist.
5. Wenn man voraussetzt, dass das n -te Auswechseln des defekten Teils im System eine Zeit T'_n dauert, so wird durch $\tilde{T}_n = T_n + T'_n$, $n \in \mathbb{N}$ ein anderer Erneuerungsprozess gegeben, der von seiner stochastischen Beschaffenheit sich nicht von dem in der Definition 2.1.1 gegebenen Prozess unterscheidet.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung wird vorausgesetzt, dass $\mu = \mathbb{E}T_n \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 2.1.1 (Individueller Ergodensatz):

Sei $N = \{N(t), t \geq 0\}$ ein Erneuerungsprozess. Dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \text{f.s.}$$

Beweis Für alle $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$, deshalb $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$ und

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

Wenn wir zeigen könnten, dass $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{f.s.} \mu$ und $N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{f.s.} \infty$, dann gilt $\frac{t}{N(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{f.s.} \mu$ und deshalb gilt die Aussage des Theorems.

Nach dem Starken Gesetz der Großen Zahlen von Kolmogorov (vgl. Skript „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (WR), Satz 7.4) gilt $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \mu$, also $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \infty$ und daher $\mathbb{P}(N(t) < \infty) = 1$, weil $\mathbb{P}(N(t) = \infty) = \mathbb{P}(S_n \leq t, \forall n) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(\exists n : \forall m \in \mathbb{N}_0 S_{n+m} > t)}_{=1, \text{ falls } S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \infty} = 1 - 1 = 0$. Dann ist

$N(t)$, $t \geq 0$, eine echte Zufallsvariable.

Zeigen wir, dass $N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{f.s.} \infty$. Alle Trajektorien von $N(t)$ sind monoton nichtfallend in $t \geq 0$, also $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} N(\omega, t)$ für alle $\omega \in \Omega$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) < \infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) < n) \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N(t) < n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n > t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n T_k > t\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_k > \frac{t}{n})}_{\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0} = 0. \end{aligned}$$

Der Übergang (*) gilt, weil $\{\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) < n\} = \{\exists t_0 \in \mathbb{Q}_+ : \forall t \geq t_0 N(t) < n\} = \cup_{t_0 \in \mathbb{Q}_+} \cap_{t \in \mathbb{Q}_+, t \geq t_0} \{N(t) < n\} = \liminf_{t \in \mathbb{Q}_+, t \rightarrow \infty} \{N(t) < n\}$, und dann benutzt man die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes, wobei $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$. Da für jedes $\omega \in \Omega$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)}$ (der Wertebereich einer Realisierung von $N(\cdot)$ ist ja eine Teilfolge von \mathbb{N}), gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \stackrel{f.s.}{=} \mu$. □

Bemerkung 2.1.2

Der Ergodensatz lässt sich verallgemeinern auf den Fall von nicht identisch verteilten T_n . Dabei wird gefordert, dass $\mu_n = \mathbb{E}T_n$, $\{T_n - \mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar sind und $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu > 0$. Dann kann bewiesen werden, dass $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{P}} \frac{1}{\mu}$ (vgl. [2], S. 276).

Theorem 2.1.2 (Zentraler Grenzwertsatz):

Falls $\mu \in (0, \infty)$, $\sigma^2 = \text{var } T_1 \in (0, \infty)$, dann gilt

$$\mu^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Y,$$

wobei $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Beweis Nach dem zentralen Grenzwertsatz für Summen von u.i.v. Zufallsvariablen (vgl. Satz 7.5, WR) gilt

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y. \quad (2.1.1)$$

Sei $[x]$ der ganze Teil von $x \in \mathbb{R}$. Es gilt für $a = \frac{\sigma^2}{\mu^3}$, dass

$$\mathbb{P}\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{at}} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(N(t) \leq x\sqrt{at} + \frac{t}{\mu}\right) = \mathbb{P}\left(S_{m(t)} > t\right),$$

wobei $m(t) = \left\lceil x\sqrt{at} + \frac{t}{\mu} \right\rceil + 1$, $t \geq 0$, und $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$. Deshalb folgt, dass

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{P}\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{at}} \leq x\right) - \varphi(x) \right| &= \left| \mathbb{P}\left(S_{m(t)} > t\right) - \varphi(x) \right| \\ &= \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_{m(t)} - \mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} > \frac{t - \mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}}\right) - \varphi(x) \right| := I_t(x) \end{aligned}$$

für beliebiges $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$, wobei φ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung ist. Für festes $x \in \mathbb{R}$ führen wir $Z_t = -\frac{t - \mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} - x$, $t \geq 0$, ein. Es gilt dann

$$I_t(x) = \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_{m(t)} - \mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} + Z_t > -x\right) - \varphi(x) \right|.$$

Wenn wir zeigen könnten, dass $Z_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, dann würde nach (2.1.1) und dem Satz von Slutsky (Satz 6.4.1, WR) folgen, dass $\frac{S_{m(t)} - \mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} + Z_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, denn aus $Z_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ f.s. folgt $Z_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} 0$. Deshalb könnte man schreiben $I_t(x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} |\bar{\varphi}(-x) - \varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(x)| = 0$, wobei $\bar{\varphi}(x) = 1 - \varphi(x)$ die Tail-Funktion der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung ist, und man hier die Symmetrie-Eigenschaft von $\mathcal{N}(0, 1)$: $\bar{\varphi}(-x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ benutzt hat.

Zeigen wir nun, dass $Z_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, also $\frac{t - \mu m(t)}{\sigma\sqrt{m(t)}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -x$. Es gilt $m(t) = x\sqrt{at} + \frac{t}{\mu} + \varepsilon(t)$,

wobei $\varepsilon(t) \in [0, 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{t - \mu m(t)}{\sigma \sqrt{m(t)}} &= \frac{t - \mu x \sqrt{at} - t - \mu \varepsilon(t)}{\sigma \sqrt{m(t)}} = -x \frac{\sqrt{at} - \mu}{\sigma \sqrt{x \sqrt{at} + \frac{t}{\mu} + \varepsilon(t)}} - \frac{\mu \varepsilon(t)}{\sigma \sqrt{m(t)}} \\
 &= -\frac{x \mu}{\sigma \sqrt{\frac{x}{\sqrt{at}} + \frac{1}{\mu a} + \frac{\varepsilon(t)}{at}}} - \frac{\mu - \varepsilon(t)}{\sigma \sqrt{m(t)}} \\
 &= \underbrace{-\frac{x \frac{\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \frac{x}{\sqrt{at}} + \frac{\varepsilon(t)}{at}}}}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} -x} - \underbrace{\frac{\mu \varepsilon(t)}{\sigma \sqrt{m(t)}}}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -x.
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.1.3

Der zentrale Grenzwertsatz läßt sich in Lindeberg-Form auch für nicht identisch verteilte T_n beweisen, vgl. [2], S. 276 - 277.

Definition 2.1.2

Die Funktion $H(t) = \mathbb{E}N(t)$, $t \geq 0$ heißt *Erneuerungsfunktion* des Prozesses N (oder der Folge $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$).

Sei $F_T(x) = \mathbb{P}(T_1 \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion von T_1 . Für beliebige Verteilungsfunktionen $F, G : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ sei die *Faltung* $F * G$ definiert als $F * G(x) = \int_{-\infty}^x F(x-y) dG(y)$. Die *k-fache Faltung* F^{*k} der Verteilungsfunktion F mit sich selbst, $k \in \mathbb{N}_0$, wird induktiv definiert:

$$\begin{aligned}
 F^{*0}(x) &= \mathbf{1}(x \in [0, \infty)), \quad x \in \mathbb{R}, \\
 F^{*1}(x) &= F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\
 F^{*(k+1)}(x) &= F^{*k} * F(x), \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Lemma 2.1.1

Die Erneuerungsfunktion H eines Erneuerungsprozesses N ist monoton nichtfallend und rechtsseitig stetig auf \mathbb{R}_+ . Außerdem gilt

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_T^{*n}(t), \quad t \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Beweis Die Monotonie und rechtsseitige Stetigkeit von H folgt aus der fast sicheren Monotonie und rechtsseitigen Stetigkeit der Trajektorien von N . Nun beweisen wir (2.1.2):

$$H(t) = \mathbb{E}N(t) = \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(S_n \leq t) \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbf{1}(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_T^{*n}(t),$$

weil $\mathbb{P}(S_n \leq t) = \mathbb{P}(T_1 + \dots + T_n \leq t) = F_T^{*n}(t)$, $t \geq 0$. Die Gleichung (*) gilt für alle partiellen Summen auf beiden Seiten, also auch im Grenzwert. □

Bis auf Ausnahmefälle ist es unmöglich, die Erneuerungsfunktion H durch die Formel (2.1.2) analytisch zu berechnen. Deshalb benutzt man oft in Berechnungen die *Laplace-Transformierte* von H .

Für eine monotone (z.B. monoton nichtfallende) rechtsseitig stetige Funktion $G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist ihre *Laplace-Transformierte* definiert als $\hat{l}_G(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x)$, $s \geq 0$. Hier ist das Integral als Lebesgue-Stieltjes-Integral zu verstehen, also als ein Lebesgue-Integral bzgl. des Maßes μ_G auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ definiert durch $\mu_G((x, y]) = G(y) - G(x)$, $0 \leq x < y < \infty$, falls G monoton nichtfallend ist.

Zur Erinnerung, für eine Zufallsvariable $X \geq 0$ ist ihre Laplace-Transformierte \hat{l}_X definiert durch $\hat{l}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_X(x)$, $s \geq 0$.

Lemma 2.1.2

Für $s > 0$ gilt:

$$\hat{l}_H(s) = \frac{\hat{l}_{T_1}(s)}{1 - \hat{l}_{T_1}(s)}.$$

Beweis Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{l}_H(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dH(x) \stackrel{(2.1.2)}{=} \int_0^\infty e^{-sx} d\left(\sum_{n=1}^\infty F_T^{*n}(x)\right) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-sx} dF^{*n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \hat{l}_{T_1+\dots+T_n}(s) = \sum_{n=1}^\infty \left(\hat{l}_{T_1}(s)\right)^n = \frac{\hat{l}_{T_1}(s)}{1 - \hat{l}_{T_1}(s)}, \end{aligned}$$

wobei für $s > 0$ gilt $\hat{l}_{T_1}(s) < 1$ und somit konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \left(\hat{l}_{T_1}(s)\right)^n$. \square

Bemerkung 2.1.4

Falls $N = \{N(t), t \geq 0\}$ ein verzögerter Erneuerungsprozess (mit Verzögerung T_1) ist, dann gelten die Aussagen der Lemmas 2.1.1 - 2.1.2 in folgender Form:

1.

$$H(t) = \sum_{n=0}^\infty (F_{T_1} * F_{T_2}^{*n})(t), \quad t \geq 0,$$

wobei F_{T_1} bzw. F_{T_2} die Verteilungsfunktionen von T_1 bzw. T_n , $n \geq 2$ sind.

2.

$$\hat{l}_H(s) = \frac{\hat{l}_{T_1}(s)}{1 - \hat{l}_{T_2}(s)}, \quad s \geq 0, \quad (2.1.3)$$

wobei \hat{l}_{T_1} und \hat{l}_{T_2} die Laplace-Transformierten der Verteilung von T_1 bzw. T_n , $n \geq 2$ sind.

Für weitere Betrachtungen brauchen wir einen Satz (von Wald) über den Erwartungswert einer Summe (in zufälliger Anzahl) von unabhängigen Zufallsvariablen.

Definition 2.1.3

Sei ν eine \mathbb{N} -wertige Zufallsvariable und sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum. ν heißt *unabhängig von der Zukunft*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ das Ereignis $\{\nu \leq n\}$ nicht von der σ -Algebra $\sigma(\{X_k, k > n\})$ abhängt.

Theorem 2.1.3 (Waldsche Identität):

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\sup E|X_n| < \infty$, $EX_n = a$, $n \in \mathbb{N}$ und sei ν eine \mathbb{N} -wertige Zufallsvariable, die von der Zukunft unabhängig ist, mit $E\nu < \infty$. Dann gilt

$$E\left(\sum_{n=1}^{\nu} X_n\right) = a \cdot E\nu.$$

Beweis Berechne $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$. Da $E\nu = \sum_{n=1}^{\infty} P(\nu \geq n)$, so folgt die Aussage aus dem Lemma 2.1.3. \square

Lemma 2.1.3 (Kolmogorov-Prokhorov):

Sei ν eine \mathbb{N} -wertige Zufallsvariable, die nicht von der Zukunft abhängt, und es gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\nu \geq n)E|X_n| < \infty. \quad (2.1.4)$$

Dann gilt $ES_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} P(\nu \geq n)EX_n$. Falls $X_n \geq 0$ f.s., dann braucht man die Bedingung (2.1.4) nicht.

Beweis Es gilt $S_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbf{1}(\nu \geq n)$. Führen wir die Bezeichnung $S_{\nu,n} = \sum_{k=1}^n X_k \mathbf{1}(\nu \geq k)$, $n \in \mathbb{N}$, ein. Beweisen wir das Lemma zunächst für $X_n \geq 0$ f.s., $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $S_{\nu,n} \uparrow S_\nu$, $n \rightarrow \infty$ für jedes $\omega \in \Omega$, und so gilt nach dem Satz über die monotone Konvergenz: $ES_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} ES_{\nu,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E(X_k \mathbf{1}(\nu \geq k))$. Da allerdings $\{\nu \geq k\} = \{\nu \leq k-1\}^c$ nicht von $\sigma(X_k) \subset \sigma(\{X_n, n \geq k\})$ abhängt, gilt $E(X_k \mathbf{1}(\nu \geq k)) = EX_k P(\nu \geq k)$, $k \in \mathbb{N}$, und daher $ES_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} P(\nu \geq n)EX_n$.

Sei nun X_n beliebig. Setze $Y_n = |X_n|$, $Z_n = \sum_{n=1}^n Y_n$, $Z_{\nu,n} = \sum_{k=1}^n Y_k \mathbf{1}(\nu \geq k)$, $n \in \mathbb{N}$. Da $Y_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $EZ_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n | P(\nu \geq k)) < \infty$ aus (2.1.4). Da allerdings $|S_{\nu,n}| \leq Z_{\nu,n} \leq Z_\nu$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt nach dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz, dass $ES_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} ES_{\nu,n} = \sum_{n=1}^{\infty} EX_n P(\nu \geq n)$, wobei diese Reihe absolut konvergiert. \square

Folgerung 2.1.1 1. Für eine beliebige Borel-messbare Funktion $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ und den Erneuerungsprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ mit Zwischenankunftszeiten $\{T_n\}$, T_n u.i.v., $\mu = ET_n \in (0, \infty)$ gilt

$$E \left(\sum_{k=1}^{N(t)+1} g(T_k) \right) = (1 + H(t))Eg(T_1), \quad t \geq 0.$$

2. $H(t) < \infty$, $t \geq 0$.

Beweis 1. Für jedes $t \geq 0$ hängt $\nu = 1 + H(t)$ offensichtlich nicht von der Zukunft von $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ab, und der Rest folgt aus dem Theorem 2.1.3 mit $X_n = g(T_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Für $s > 0$ betrachte $T_n^{(s)} = \min\{T_n, s\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wähle $s > 0$ so, dass für beliebig gewähltes (aber festes) $\varepsilon > 0 : \mu^{(s)} = ET_1^{(s)} \geq \mu - \varepsilon > 0$. Sei $N^{(s)}$ der Erneuerungsprozess, der auf der Folge $\{T_n^{(s)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Zwischenankunftszeiten aufgebaut wird: $N^{(s)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(T_n^{(s)} \leq t)$, $t \geq 0$. Es gilt $N(t) \leq N^{(s)}(t)$, $t \geq 0$, f.s., dabei nach der Folgerung 2.1.1:

$$(\mu - \varepsilon)(EN^{(s)}(t) + 1) \leq \mu^{(s)}(EN^{(s)}(t) + 1) = ES_{N^{(s)}(t)+1}^{(s)} = \underbrace{E(S_{N^{(s)}(t)}^{(s)})}_{\leq t} + \underbrace{E(T_{N^{(s)}(t)+1}^{(s)})}_{\leq s} \leq t + s,$$

$t \geq 0$, wobei $S_n^{(s)} = T_1^{(s)} + \dots + T_n^{(s)}$, $n \in \mathbb{N}$. Daher $H(t) = EN(t) \leq EN^{(s)}(t) \leq \frac{t+s}{\mu-\varepsilon}$, $t \geq 0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$, und unsere Aussage $H(t) < \infty$, $t \geq 0$. \square

Folgerung 2.1.2 (Elementarer Erneuerungssatz):

Für einen Erneuerungsprozess N wie in Folgerung 2.1.1, 1) gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Beweis In der Folgerung 2.1.1, Teil 2) ist bereits bewiesen worden, dass $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$. Zeigen wir, dass $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$, dann ist unsere Aussage bewiesen. Nach Theorem 2.1.1 gilt $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}$ f.s., daher nach Fatou's Lemma

$$\frac{1}{\mu} = \mathbb{E} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t}.$$

□

Bemerkung 2.1.5 1. Man kann auch zeigen, dass es sich im Falle des endlichen 2. Momentes von T_n ($\mu_2 = \mathbb{E}T_1^2 < \infty$) eine genauere Asymptotik für $H(t)$, $t \rightarrow \infty$ herleiten läßt:

$$H(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} + o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

2. Der elementare Erneuerungssatz gilt auch für verzögerte Erneuerungsprozesse, wobei $\mu = \mathbb{E}T_2$. Definieren wir das *Erneuerungsmaß* H auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ durch $H(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_B dF_T^{*n}(x)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Es gilt $H((-\infty, t]) = H(t)$, $H((s, t]) = H(t) - H(s)$, $s, t \geq 0$, wenn man durch H sowohl die Erneuerungsfunktion als auch das Erneuerungsmaß bezeichnet.

Theorem 2.1.4 (Hauptsatz der Erneuerungstheorie):

Sei $N = \{N(t), t \geq 0\}$ ein (verzögerter) Erneuerungsprozess assoziiert mit der Folge $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, wobei T_n , $n \in \mathbb{N}$ unabhängig sind, $\{T_n, n \geq 2\}$ identisch verteilt, und die Verteilung von T_2 nicht arithmetisch ist, also nicht auf einem regelmäßigen Gitter mit Wahrscheinlichkeit 1 konzentriert ist. Die Verteilung von T_1 sei beliebig. Sei $\mathbb{E}T_2 = \mu \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$\int_0^t g(t-x) dH(x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} g(x) dx,$$

wobei $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[0, n]$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\sum_{n=0}^{\infty} \max_{n \leq x \leq n+1} |g(x)| < \infty$.

Ohne Beweis.

Insbesondere gilt $H((t-u, t]) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{u}{\mu}$, für ein beliebiges $u \in \mathbb{R}_+$, also verhält sich H asymptotisch (für $t \rightarrow \infty$) wie das Lebesgue-Maß.

Definition 2.1.4

Die Zufallsvariable $\chi(t) = S_{N(t)+1} - t$ heißt *Exzess* von N zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Es gilt offensichtlich $\chi(0) = T_1$. Geben wir nun ein Beispiel eines Erneuerungsprozesses mit stationären Zuwächsen.

Sei $N = \{N(t), t \geq 0\}$ ein verzögerter Erneuerungsprozess assoziiert mit Folge von Zwischenanfuhrzeiten $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sei F_{T_1} bzw. F_{T_2} die Verteilungsfunktion der Verzögerung T_1 bzw. von T_n , $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass $\mu = \mathbb{E}T_2 \in (0, \infty)$, $F_{T_2}(0) = 0$, also $T_2 > 0$ f.s. und

$$F_{T_1}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}_{T_2}(y) dy, \quad x \geq 0. \quad (2.1.5)$$

In diesem Fall sagt man, dass F_{T_1} die *integrierte Tailverteilungsfunktion* von T_2 ist.

Theorem 2.1.5

Unter den obigen Voraussetzungen ist N ein Prozess mit stationären Zuwächsen.

Beweis Sei $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$. Wegen Unabhängigkeit von T_n , $n \in \mathbb{N}$ hängt die gemeinsame Verteilung von $(N(t_1 + t) - N(t_0 + t), \dots, N(t_n + t) - N(t_{n-1} + t))^\top$ nicht von t ab, falls die Verteilung von $\chi(t)$ unabhängig von t ist, also $\chi(t) \stackrel{d}{=} \chi(0) = T_1$, $t \geq 0$, siehe Abbildung

Zeigen wir, dass $F_{T_1} = F_{\chi(t)}$, $t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 F_{\chi(t)}(x) &= \mathbb{P}(\chi(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq t, t < S_{n+1} \leq t + x) \\
 &= \mathbb{P}(S_0 = 0 \leq t, t < S_1 = T_1 \leq t + x) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}(S_n \leq t, t < S_n + T_{n+1} \leq t + x) \mid S_n)) \\
 &= F_{T_1}(t + x) - F_{T_1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(t - y < T_{n+1} \leq t + x - y) dF_{S_n}(y) \\
 &= F_{T_1}(t + x) - F_{T_1}(t) + \int_0^t \mathbb{P}(t - y < T_2 \leq t + x - y) d\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} F_{S_n}(y)}_{H(y)}\right).
 \end{aligned}$$

Falls wir zeigen könnten, dass $H(y) = \frac{y}{\mu}$, $y \geq 0$, dann hätten wir

$$\begin{aligned}
 F_{\chi(t)}(x) &= F_{T_1}(t + x) - F_{T_1}(t) + \frac{1}{\mu} \int_t^0 (F_{T_2}(z + x) - 1 + 1 - F_{T_2}(z)) d(-z) \\
 &= F_{T_1}(t + x) - F_{T_1}(t) + \frac{1}{\mu} \int_0^t (\bar{F}_{T_2}(z) - \bar{F}_{T_2}(z + x)) dz \\
 &= F_{T_1}(t + x) - F_{T_1}(t) + F_{T_1}(t) - \frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} \bar{F}_{T_2}(y) dy \\
 &= F_{T_1}(t + x) - F_{T_1}(t + x) + F_{T_1}(x) = F_{T_1}(x), \quad x \geq 0,
 \end{aligned}$$

nach der Form (2.1.5) der Verteilung von T_1 .

Nun soll gezeigt werden, dass $H(t) = \frac{t}{\mu}$, $t \geq 0$. Dazu verwenden wir die Formel (2.1.4): es gilt

$$\begin{aligned}
 \hat{l}_{T_1}(s) &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - F_{T_2}(t)) dt = \frac{1}{\mu} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} dt}_{\frac{1}{s}} - \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-st} F_{T_2}(t) dt \\
 &= \frac{1}{\mu s} \left(1 + \int_0^{\infty} F_{T_2}(t) d e^{-st} \right) = \frac{1}{\mu s} \left(1 + \underbrace{e^{-st} F_{T_2}(t)}_{-F_{T_2}(0)=0} \Big|_0^{\infty} - \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} dF_{T_2}(t)}_{\hat{l}_{T_2}(s)} \right) \\
 &= \frac{1}{\mu s} (1 - \hat{l}_{T_2}(s)), \quad s \geq 0.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel (2.1.4) bekommt man

$$\hat{l}_H(s) = \frac{\hat{l}_{T_1}(s)}{1 - \hat{l}_{T_2}(s)} = \frac{1}{\mu s} = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \hat{l}_{\frac{t}{\mu}}(s), \quad s \geq 0.$$

Da die Laplace-Transformierte einer Funktion eindeutig diese Funktion bestimmt, gilt $H(t) = \frac{t}{\mu}$, $t \geq 0$. \square

Bemerkung 2.1.6

Im Beweis des Theorems 2.1.5 haben wir gezeigt, dass für den verzögerten Erneuerungsprozess mit Verzögerung, welche die Verteilung (2.1.5) besitzt, $H(t) \sim \frac{t}{\mu}$ nicht nur asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ (wie im elementaren Erneuerungssatz), sondern es gilt $H(t) = \frac{t}{\mu}$, für alle $t \geq 0$. Das bedeutet, es finden im Mittelwert $\frac{1}{\mu}$ Erneuerungen pro Einheitszeitintervall statt. Aus diesem Grund wird ein solcher Prozess N *homogener Erneuerungsprozess* genannt.

Es läßt sich auch folgendes Theorem beweisen:

Theorem 2.1.6

Falls $N = \{N(t), t \geq 0\}$ ein verzögerter Erneuerungsprozess mit beliebiger Verzögerung T_1 und nicht-arithmetischer Verteilung von T_n , $n \geq 2$ ist, $\mu = \mathbf{E}T_2 \in (0, \infty)$, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_{\chi(t)}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}_{T_2}(y) dy, \quad x \geq 0.$$

Das heißt, die Grenzwertverteilung von Exzess $\chi(t)$, $t \rightarrow \infty$ wird bei der Definition eines homogenen Erneuerungsprozesses als Verteilung von T_1 angenommen.

2.2 Poisson-artige Prozesse

2.2.1 Poisson-Prozesse

In diesem Abschnitt werden wir die Definition eines homogenen Poisson-Prozesses (gegeben im Abschnitt 1.2, Beispiel 5) verallgemeinern.

Definition 2.2.1

Der Zählprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ heißt Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß Λ , falls

1. $N(0) = 0$ f.s.
2. Λ ein lokalendliches Maß auf \mathbb{R}_+ ist, d.h., $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}_+$ besitzt die Eigenschaft $\Lambda(B) < \infty$ für jede beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
3. N unabhängige Zuwächse besitzt.
4. $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\Lambda((s, t]))$ für alle $0 \leq s < t < \infty$.

Manchmal wird der Poisson-Prozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ durch das entsprechende zufällige Poissonsche Zählmaß $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ definiert, d.h., $N = ([0, t])$, $t \geq 0$, wobei ein Zählmaß ein lokalendliches Maß mit Werten aus \mathbb{N}_0 ist.

Definition 2.2.2

Ein zufälliges Zählmaß $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ heißt Poissonsches mit lokalendlichem Intensitätsmaß Λ , falls

1. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und für beliebige paarweise disjunkte beschränkte Mengen $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ die Zufallsvariablen $N(B_1), N(B_2), \dots, N(B_n)$ unabhängig sind.
2. $N(B) \sim \text{Pois}(\Lambda(B))$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, B -beschränkt.

Es ist klar, dass die Eigenschaften 3 und 4 der Definition 2.2.1 aus den Eigenschaften 1 und 2 der Definition 2.2.2 folgen. Die Eigenschaft 1 der Definition 2.2.1 ist jedoch eine eigenständige Annahme. $N(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ wird als die Anzahl der Punkte von N in der Menge B interpretiert.

Bemerkung 2.2.1

Genauso wie in Definition 2.2.2 kann ein Poissonsches Zählmaß auf beliebigem topologischem Raum E , ausgestattet mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(E)$, definiert werden. Sehr häufig wird in Anwendungen $E = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ gewählt.

Lemma 2.2.1

Für jedes lokalendliche Maß Λ auf \mathbb{R}_+ existiert ein Poisson-Prozess mit Λ als Intensitätsmaß.

Beweis Falls so ein Poisson-Prozess existiert hätte, wäre die charakteristische Funktion $\varphi_{N(t)-N(s)}(\cdot)$ des Zuwachses $N(t) - N(s)$, $0 \leq s < t < \infty$ nach Eigenschaft 4 der Definition 2.2.1 gleich $\varphi_{s,t}(z) = \varphi_{\text{Pois}(\Lambda((s,t]))}(z) = e^{\Lambda((s,t))(e^{iz}-1)}$, $z \in \mathbb{R}$. Zeigen wir, dass die Familie von charakteristischen Funktionen $\{\varphi_{s,t}, 0 \leq s < t < \infty\}$ die Eigenschaft 1.7.1 besitzt: für alle $n : 0 \leq s < u < t$, $\varphi_{s,u}(z)\varphi_{u,t}(z) = e^{\Lambda((s,u))(e^{iz}-1)}e^{\Lambda((u,t))(e^{iz}-1)} = e^{(\Lambda((s,u))+\Lambda((u,t)))(e^{iz}-1)} = e^{\Lambda((s,t))(e^{iz}-1)} = \varphi_{s,t}(z)$, $z \in \mathbb{R}$, weil das Maß Λ additiv ist. Die Existenz des Poisson-Prozesses N folgt daher aus dem Theorem 1.7.1. \square

Bemerkung 2.2.2

Die Existenz eines Poissonschen Zählmaßes kann mit Hilfe des Theorems von Kolmogorov bewiesen werden, allerdings in einer allgemeineren Form wie im Theorem 1.1.2.

Aus den Eigenschaften der Poisson-Verteilung folgt u.A. $\mathbb{E}N(B) = \text{var } N(B) = \Lambda(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Daher wird $\Lambda(B)$ als die mittlere Anzahl der Punkte von N in der Menge B , $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ interpretiert.

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn $\Lambda(dx) = \lambda dx$ für $\lambda \in (0, \infty)$, d.h., Λ proportional zum Lebesgue-Maß ν_1 auf \mathbb{R}_+ ist. Dann heißt $\lambda = \mathbb{E}N(1)$ die Intensität von N .

Wir werden demnächst zeigen, dass in diesem Fall N ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ ist. Zur Erinnerung: Im Abschnitt 1.2 wurde der homogene Poisson-Prozess als ein Erneuerungsprozess mit Zwischenankunftszeiten $T_N \sim \text{Exp}(\lambda)$ definiert: $N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$, $S_n = T_1 + \dots + T_n$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$.

Aufgabe 2.2.1

Zeigen Sie, dass der homogene Poisson-Prozess ein homogener Erneuerungsprozess mit $T_1 \stackrel{d}{=} T_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$ ist. Hinweis: man soll zeigen, dass für eine beliebige Exponentialverteilte Zufallsvariable X die integrierte Tailverteilungsfunktion von X gleich F_X ist.

Theorem 2.2.1

Sei $N = \{N(t), t \geq 0\}$ ein Zählprozess. Folgende Aussagen sind äquivalent.

1. N ist ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.
2. a) $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$, $t \geq 0$
 b) für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, gilt dass der Zufallsvektor (S_1, \dots, S_n) unter der Bedingung $\{N(t) = n\}$ dieselbe Verteilung besitzt, wie die Ordnungsstatistiken von u.i.v. Zufallsvariablen $U_i \in \mathcal{U}([0, t])$, $i = 1, \dots, n$.
3. a) N besitzt unabhängige Zuwächse,

- b) $EN(1) = \lambda$, und
 c) es gilt die Eigenschaft 2b).
4. a) N hat stationäre und unabhängige Zuwächse, und
 b) es gilt $P(N(t) = 0) = 1 - \lambda t + o(t)$, $P(N(t) = 1) = \lambda t + o(t)$, $t \downarrow 0$.
5. a) N hat stationäre und unabhängige Zuwächse,
 b) es gilt die Eigenschaft 2a).

Bemerkung 2.2.3 1. Es ist klar, dass die Definition 2.2.1 mit $\Lambda(dx) = \lambda dx$, $\lambda \in (0, \infty)$ nach Theorem 2.2.1 eine äquivalente Definition des homogenen Poisson-Prozesses ist.

2. Der homogene Poisson-Prozess N wurde am Anfang des 20. Jahrhunderts von den Physikern A. Einstein und M. Smoluchovsky eingeführt, um den Zählprozess von Elementarteilchen im Geigerzähler modellieren zu können.
3. Aus 4b) folgt $P(N(t) > 1) = o(t)$, $t \downarrow 0$.
4. Die Intensität von N hat folgende Interpretation: $\lambda = EN(1) = \frac{1}{ET_n}$, also die mittlere Anzahl der Erneuerungen von N in einem Zeitintervall der Länge 1.
5. Die Erneuerungsfunktion vom homogenen Poisson-Prozess ist $H(t) = \lambda t$, $t \geq 0$. Dabei gilt offensichtlich $H(t) = \Lambda([0, t])$, $t > 0$.

Beweis Schema des Beweises: 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 1)

1) \Rightarrow 2):

Aus 1) folgt $S_n = \sum_{k=1}^n T_k \sim Erl(n, \lambda)$, weil $T_k \sim Pois(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, daher $P(N(t) = 0) = P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, und für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(\{N(t) \geq n\} \setminus \{N(t) \geq n+1\}) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) \\ &= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^t \frac{d}{dx} \left(\frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} \right) dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Daher ist 2a) bewiesen.

Beweisen wir nun 2b). Nach dem Transformationssatz für Zufallsvektoren (vgl. Satz 3.6.1, WR) aus

$$\begin{cases} S_1 &= T_1 \\ S_2 &= T_1 + T_2 \\ &\vdots \\ S_{n+1} &= T_1 + \dots + T_{n+1} \end{cases}$$

folgt, dass die Dichte $f_{(S_1, \dots, S_n)}$ von $(S_1, \dots, S_{n+1})^\top$ durch die Dichte von $(T_1, \dots, T_{n+1})^\top$, $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, u.i.v., ausgedrückt werden kann:

$$f_{(S_1, \dots, S_{n+1})}(t_1, \dots, t_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} f_{T_k}(t_k - t_{k-1}) = \prod_{k=1}^{n+1} \lambda e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} = \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}}$$

für beliebige $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$, $t_0 = 0$.

Für alle anderen t_1, \dots, t_{n+1} gilt $f_{(S_1, \dots, S_{n+1})}(t_1, \dots, t_{n+1}) = 0$.

Deshalb

$$\begin{aligned}
 f_{(S_1, \dots, S_n)}(t_1, \dots, t_n | N(t) = n) &= f_{(S_1, \dots, S_n)}(t_1, \dots, t_n | S_k \leq t, k \leq n, S_{n+1} > t) \\
 &= \frac{\int_t^\infty f_{(S_1, \dots, S_{n+1})}(t_1, \dots, t_{n+1}) dt_{n+1}}{\int_0^t \int_{t_1}^t \dots \int_{t_{n-1}}^t \int_t^\infty f_{(S_1, \dots, S_{n+1})}(t_1, \dots, t_{n+1}) dt_{n+1} dt_n \dots dt_1} \\
 &= \frac{\int_t^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1}}{\int_0^t \int_{t_1}^t \dots \int_{t_{n-1}}^t \int_t^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1} dt_n \dots dt_1} \times \\
 &\quad \times \mathbf{I}(0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t) \\
 &= \frac{n!}{t^n} \mathbf{I}(0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t).
 \end{aligned}$$

Das ist genau die Dichte von n u.i.v $\mathcal{U}([0, t])$ -Zufallsvariablen.

Aufgabe 2.2.2

Zeigen Sie es.

2) \Rightarrow 3)

Aus 2a) folgt offensichtlich 3b). Jetzt soll lediglich die Unabhängigkeit der Zuwächse von N bewiesen werden. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ gilt für $x = x_1 + \dots + x_n$, dass

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\cap_{k=1}^n \{N(t_k) - N(t_{k-1}) = x_k\}) &= \underbrace{\mathbf{P}(\cap_{k=1}^n \{N(t_k) - N(t_{k-1}) = x_k\} | N(t_n) = x)}_{\frac{x!}{x_1! \dots x_n!} \prod_{k=1}^n \binom{t_k - t_{k-1}}{t_n} \text{ nach 2c)}} \times \\
 &\quad \times \underbrace{\mathbf{P}(N(t_n) = x)}_{e^{-\lambda t_n} \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} \text{ nach 2a)}} \\
 &= \prod_{k=1}^n \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{x_k}}{x_k!} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})},
 \end{aligned}$$

weil die Wahrscheinlichkeit von (*) die Polynomialverteilung mit Parametern n , $\left\{ \frac{t_k - t_{k-1}}{t_n} \right\}_{k=1}^n$ angehört. Denn das Ereignis (*) ist es, beim unabhängigen gleichverteilten Werfen von x Punkte auf $[0, t]$, jeweils x_k Punkte im Korb der Länge $t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$ zu haben. Damit ist 3a) bewiesen, weil $\mathbf{P}(\cap_{k=1}^n \{N(t_k) - N(t_{k-1}) = x_k\}) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(\{N(t_k) - N(t_{k-1}) = x_k\})$.

3) \Rightarrow 4)

Zeigen wir, dass N stationäre Zuwächse besitzt. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ und $h > 0$ betrachten wir $I(h) = \mathbf{P}(\cap_{k=1}^n \{N(t_k + h) - N(t_{k-1} + h) = x_k\})$ und zeigen, dass $I(h)$ nicht von $h \in \mathbb{R}$ abhängt. Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned}
 I(h) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=1}^n \{N(t_k + h) - N(t_{k-1} + h) = x_k\} | N(t_n + h) = m) \cdot \mathbf{P}(N(t_n + h) = m) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{x_1! \dots x_n!} \prod_{k=1}^n \binom{t_k + h - t_{k-1} - h}{t_n + h - h}^{x_k} e^{-\lambda(t_n + h)} \frac{(\lambda(t_n + h))^m}{m!} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=1}^n \{N(t_k) - N(t_{k-1}) = x_k\} | N(t_n) = m) \times \mathbf{P}(N(t_n) = m) = I(0).
 \end{aligned}$$

Zeigen wir nun die Eigenschaft 4b) für $h \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N(h) = 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(h) = 0, N(1) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(h) = 0, N(1) - N(h) = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(1) - N(h) = k, N(1) = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(1) = k) \mathbb{P}(N(1) - N(h) = k \mid N(1) = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(1) = k) (1-h)^k.
 \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass $\mathbb{P}(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$, d.h., $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - \mathbb{P}(N(h) = 0)) = \lambda$. In der Tat es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h} (1 - \mathbb{P}(N(h) = 0)) &= \frac{1}{h} \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(1) = k) (1-h)^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(1) = k) \cdot \frac{1 - (1-h)^k}{h} \\
 &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(1) = k) \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1-h)^k}{h}}_k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(1) = k) k = \mathbb{E}N(1) = \lambda,
 \end{aligned}$$

weil diese Reihe gleichmäßig in h konvergiert, da sie durch $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(1) = k) k = \lambda < \infty$ dominiert wird wegen der Ungleichung $(1-h)^k \geq 1 - kh$, $h \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Ähnlich kann man zeigen, dass $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(N(h)=1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(1) = k) k (1-h)^{k-1} = \lambda$.
4) \Rightarrow 5)

Zu zeigen ist es, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$

$$p_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (2.2.1)$$

gilt. Wir beweisen dies induktiv bezüglich n . Zunächst zeigen wir, dass $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, $h = 0$. Dazu betrachten wir $p_0(t+h) = \mathbb{P}(N(t+h) = 0) = \mathbb{P}(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0) = p_0(t)p_0(h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h))$, $h \rightarrow 0$. Ähnlich kann man zeigen, dass $p_0(t) = p_0(t-h)(1 - \lambda h + o(h))$, $h \rightarrow 0$. Somit gilt $p_0'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t)$, $t > 0$. Da $p_0(0) = \mathbb{P}(N(0) = 0) = 1$, folgt aus

$$\begin{cases} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) \\ p_0(0) &= 1, \end{cases}$$

dass es eine eindeutige Lösung $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ existiert. Nun sei für n die Darstellung (2.2.1) bewiesen. Beweisen wir sie für $n+1$.

$$\begin{aligned}
 p_{n+1}(t+h) &= \mathbb{P}(N(t+h) = n+1) \\
 &= \mathbb{P}(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 1) + \mathbb{P}(N(t) = n+1, N(t+h) - N(t) = 0) \\
 &= p_n(t) - p_1(h) + p_{n+1}(t) - p_0(h) \\
 &= p_n(t)(\lambda h + o(h)) + p_{n+1}(t)(1 - \lambda h + o(h)), \quad h \rightarrow 0, h > 0.
 \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{cases} p'_{n+1}(t) &= -\lambda p_{n+1}(t) + \lambda p_n(t), \quad t > 0 \\ p_{n+1}(0) &= 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Da $p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, bekommt man $p_{n+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$ als Lösung von (2.2.2). (In der Tat $p_{n+1}(t) = C(t)e^{-\lambda t} \Rightarrow C'(t)e^{-\lambda t} = \lambda C(t)e^{-\lambda t} + \lambda p_n(t)$
 $C'(t) = \frac{\lambda^{n+1} t^n}{n!} \Rightarrow C(t) = \frac{\lambda^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}, C(0) = 0$)

5) \Rightarrow 1)

Sei N ein Zählprozess $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}, t \geq 0$, der Bedingungen 5a) und 5b) erfüllt. Zeigen wir, dass $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$, wobei T_k i.i.d. mit $T_k \sim \text{Exp}(\lambda), k \in \mathbb{N}$. Da $T_k = S_k - S_{k-1}, k \in \mathbb{N}, S_0 = 0$, betrachten wir für $b_0 = 0 \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_n < b_n$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^n \{a_k < S_k \leq b_k\} \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \{N(a_k) - N(b_{k-1}) = 0, N(b_k) - N(a_k) = 1\} \right. \\ & \quad \left. \cap \{N(a_n) - N(b_{n-1}) = 0, N(b_n) - N(a_n) \geq 1\} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(\mathbf{P}(N(a_k - b_{k-1}) = 0) \mathbf{P}(N(b_k - a_k) = 1) \right)}_{e^{-\lambda(a_k - b_{k-1})} \lambda(b_k - a_k) e^{-\lambda(b_k - a_k)}} \times \\ & \quad \underbrace{\left(\mathbf{P}(N(a_n - b_{n-1}) = 0) \mathbf{P}(N(b_n - a_n) \geq 1) \right)}_{e^{-\lambda(a_n - b_{n-1})} (1 - e^{-\lambda(b_n - a_n)})} \\ &= e^{-\lambda(a_n - b_{n-1})} (1 - e^{-\lambda(b_n - a_n)}) \prod_{k=1}^{n-1} \lambda(b_k - a_k) e^{-\lambda(b_k - b_{k-1})} \\ &= \lambda^{n-1} (e^{-\lambda a_n} - e^{-\lambda b_n}) \prod_{k=1}^{n-1} (b_k - a_k) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \lambda^n e^{-\lambda y_n} dy_n \dots y_1. \end{aligned}$$

Die gemeinsame Dichte von $(S_1, \dots, S_n)^\top$ ist also gegeben durch $\lambda^n e^{-\lambda y_n} \mathbf{1}(y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n)$.
 \square

2.2.2 Zusammengesetzter Poisson-Prozess

Definition 2.2.3

Sei $N = \{N(t), t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, konstruiert mit Hilfe der Folge $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Zwischenankunftszeiten. Sei $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen, unabhängigen von $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sei F_U die Verteilungsfunktion von U_1 . Für beliebiges $t \geq 0$ setze $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k$. Der stochastische Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ heißt *zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Parametern λ, F_U* . Die Verteilung von $X(t)$ heißt dabei *zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Parametern $\lambda t, F_U$* .

Zusammengesetzter Poisson-Prozess $X(t), t \geq 0$ kann als Summe der „Marken“ U_n eines homogenen markierten Poisson-Prozesses (N, U) bis zur Zeit t interpretiert werden.

So wird $X(t)$ als Gesamtarbeitsbelastung eines Servers bis zur Zeit t in der Warteschlangentheorie interpretiert, falls die Aufforderungen zum Service zu Zeitpunkten $S_n = \sum_{k=1}^n T_k, n \in \mathbb{N}$ eingehen und mit sich den Arbeitsaufwand $U_n, n \in \mathbb{N}$ mitbringen.

In der Versicherungsmathematik ist $X(t), t \geq 0$ der Gesamtschaden eines Portfolios bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit Schadenanzahl $N(t)$ und Schadenhöhen $U_n, n \in \mathbb{N}$.

Theorem 2.2.2

Sei $X = \{X(t), t \geq 0\}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Parametern λ, F_U . Es gelten folgende Eigenschaften:

1. X hat unabhängige stationäre Zuwächse.
2. Falls $\hat{m}_U(s) = \mathbb{E}e^{sU_1}$, $s \in \mathbb{R}$, die momenterzeugende Funktion von U_1 ist, so dass $\hat{m}_U(s) < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\hat{m}_{X(t)}(s) = e^{\lambda t(\hat{m}_U(s)-1)}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad \mathbb{E}X(t) = \lambda t \mathbb{E}U_1, \quad \text{var } X(t) = \lambda t \mathbb{E}U_1^2, \quad t \geq 0.$$

Beweis 1. Zu zeigen ist, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ und h

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i_1=N(t_0+h)+1}^{N(t_1+h)} U_{i_1} \leq x_1, \dots, \sum_{i_n=N(t_{n-1}+h)+1}^{N(t_n+h)} U_{i_n} \leq x_n \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P} \left(\sum_{i_k=N(t_{k-1})+1}^{N(t_k)} U_{i_k} \leq x_k \right)$$

für beliebige $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. In der Tat, gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sum_{i_1=N(t_0+h)+1}^{N(t_1+h)} U_{i_1} \leq x_1, \dots, \sum_{i_n=N(t_{n-1}+h)+1}^{N(t_n+h)} U_{i_n} \leq x_n \right) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n F_n^{*k_j}(x_j) \right) \mathbb{P}(\cap_{m=1}^n \{N(t_m+h) - N(t_{m-1}+h) = k_m\}) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n F_n^{*k_j}(x_j) \right) \left(\prod_{m=1}^n \mathbb{P}(N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m) \right) \\ &= \prod_{m=1}^n \sum_{k_m=0}^{\infty} F_n^{*k_m}(x_m) \mathbb{P}(N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m) \\ &= \prod_{m=1}^n \mathbb{P} \left(\sum_{k_m=N(t_{m-1})+1}^{N(t_m)} \leq x_m \right) \end{aligned}$$

2.

Aufgabe 2.2.3

□

2.2.3 Cox-Prozess

Ein Cox-Prozess ist ein (im Allgemeinen inhomogener) Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß Λ , das an sich ein zufälliges Maß darstellt. Diese intuitive Vorstellung kann in folgender Definition formalisiert werden.

Definition 2.2.4

Sei $\Lambda = \{\Lambda(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ ein zufälliges f.s. lokal-endliches Maß. Das zufällige Zählmaß $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ wird *Cox-Zählmaß* (oder *doppelt-stochastisches Poisson-Maß*) mit *zufälligem Intensitätsmaß* Λ genannt, falls für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq a_1 <$

$b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$ gilt $\mathbf{P}(\cap_{i=1}^n \{N((a_i, b_i]) = k_i\}) = \mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda((a_i, b_i])} \frac{\Lambda^{k_i}((a_i, b_i])}{k_i!} \right)$. Der Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ mit $N(t) = N((0, t])$ heißt *Cox-Prozess* (oder *doppelt-stochastischer Poisson-Prozess*) mit zufälligem Intensitätsmaß Λ .

Beispiel 2.2.1 1. Falls das zufällige Maß Λ f.s. absolut stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes ist, d.h., $\Lambda(B) = \int_B \lambda(t) dt$, B - beschränkt, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, wobei $\{\lambda(t), t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess mit f.s. Borel-meßbaren borel-integrierbaren Trajektorien ist, $\lambda(t) \geq 0$ f.s. für alle $t \geq 0$, der Intensitätsprozess von N genannt wird.

2. Insbesondere kann $\lambda(t) \equiv Y$ sein, wobei Y eine nicht-negative Zufallsvariable ist. Dann gilt $\Lambda(B) = Y \nu_1(B)$, also hat N eine zufällige Intensität Y . Solche Cox-Prozesse werden *gemischte Poisson-Prozesse* genannt.

Einen Cox-Prozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ mit Intensitätsprozess $\{\lambda(t), t \geq 0\}$ kann man wie folgt explizit konstruieren. Sei $\tilde{N} = \{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität 1, der unabhängig von $\{\lambda(t), t \geq 0\}$ ist. Dann ist $N \stackrel{d}{=} N_1$, wobei der Prozess $N_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$ gegeben ist durch $N_1(t) = \tilde{N}(\int_0^t \lambda(y) dy)$, $t \geq 0$. Die Aussage $N \stackrel{d}{=} N_1$ soll natürlich bewiesen werden. Wir werden sie jedoch ohne Beweis annehmen. Sie bildet auch die Grundlage für die Simulation des Cox-Prozesses N .

3 Wiener-Prozess

3.1 Elementare Eigenschaften

Im Beispiel 2) des Abschnittes 1.2 haben wir die *Brownsche Bewegung* (oder *Wiener-Prozess*) $W = \{W(t), t \geq 0\}$ definiert als einen Gaußschen Prozess mit $\mathbb{E}W(t) = 0$ und $\text{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s, t\}$, $s, t \geq 0$. Geben wir jetzt eine neue (äquivalente) Definition an.

Definition 3.1.1

Ein stochastischer Prozess $W = \{W(t), t \geq 0\}$ heißt Wiener-Prozess (oder Brownsche Bewegung), falls

1. $W(0) = 0$ f.s.
2. W hat unabhängige Zuwächse
3. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, $0 \leq s < t$

Die Existenz von W nach Definition 3.1.1 folgt aus dem Satz 1.7.1, weil nämlich $\varphi_{s,t}(z) = \mathbb{E}e^{iz(W(t)-W(s))} = e^{-\frac{(t-s)z^2}{2}}$, $z \in \mathbb{R}$, und $e^{-\frac{(t-u)z^2}{2}} e^{-\frac{(u-s)z^2}{2}} = e^{-\frac{(t-s)z^2}{2}}$ für $0 \leq s < u < t$, also $\varphi_{s,u}(z)\varphi_{u,t}(z) = \varphi_{s,t}(z)$, $z \in \mathbb{R}$. Aus dem Satz 1.3.1 folgt außerdem die Existenz einer Version mit stetigen Trajektorien.

Aufgabe 3.1.1

Zeigen Sie, dass das Theorem für $\alpha = 3$, $\sigma = \frac{1}{2}$.

Der Wiener-Prozess ist nach dem Mathematiker Norbert Wiener (1894 - 1964) benannt worden. Warum existiert dann die Brownsche Bewegung? Aus dem Satz von Kolmogorov (Satz 1.1.2) existiert für jede Funktion $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ und jede positiv semi-definite Funktion $C : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ein reellwertiger Gaußscher Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit Mittelwert $\mathbb{E}X(t) = \mu(t)$, $t \geq 0$, und Kovarianzfunktion $\text{cov}(X(s), X(t)) = C(s, t)$, $s, t \geq 0$. Es bleibt lediglich zu zeigen, dass $C(s, t) = \min\{s, t\}$, $s, t \geq 0$ positiv-semidefinit ist.

Aufgabe 3.1.2

Zeigen Sie es.

Deswegen wird oft angenommen, dass der Wiener-Prozess stetige Pfade besitzt (man nimmt einfach die entsprechende Version von ihm).

Theorem 3.1.1

Beide Definitionen des Wiener-Prozesses sind äquivalent.

Beweis 1. Aus der Definition im Abschnitt 1.2 folgt die Definition 3.1.1.

$W(0) = 0$ f.s. folgt aus $\text{var}(W(0)) = \min\{0, 0\} = 0$. Beweisen wir nun, dass die Zuwächse von W unabhängig sind. Falls $Y \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ ein n -dimensionaler Gaußscher Zufallsvektor ist und A eine $(n \times n)$ -Matrix, dann gilt $AY \sim \mathcal{N}(A\mu, AK A^\top)$, dies folgt aus der expliziten Form der charakteristischen Funktion von Y . Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_n$,

$Y = (W(t_0), W(t_1), \dots, W(t_n))^T$. Es gilt für $Z = (W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}))^T$, dass $Z = AY$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist Z auch Gaußsch mit einer Kovarianzmatrix, die diagonal ist. In der Tat gilt $\text{cov}(W(t_{i+1}) - W(t_i), W(t_{j+1}) - W(t_j)) = \min\{t_{i+1}, t_{j+1}\} - \min\{t_{i+1}, t_j\} - \min\{t_i, t_{j+1}\} + \min\{t_i, t_j\} = 0$ für $i \neq j$. Daher sind die Koordinaten von Z unkorreliert, was für die multivariate Gaußsche Verteilung Unabhängigkeit bedeutet. Deshalb sind die Zuwächse von W unabhängig. Weiterhin, gilt für beliebiges $0 \leq s < t$, dass $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Die Normalverteilttheit folgt aus der Tatsache, dass $Z = AY$ Gaußsch ist, offensichtlich gilt $\mathbf{E}W(t) - \mathbf{E}W(s) = 0$ und $\text{var}(W(t) - W(s)) = \text{var}(W(t)) - 2\text{cov}(W(s), W(t)) + \text{var}(W(s)) = t - 2\min\{s, t\} + s = t - s$.

2. Aus der Definition 3.1.1 folgt die Definition im Abschnitt 1.2.

Da $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ für $0 \leq s < t$, gilt $\text{cov}(W(s), W(t)) = \mathbf{E}[W(s)(W(t) - W(s) + W(s))] = \mathbf{E}W(s)\mathbf{E}(W(t) - W(s)) + \text{var} W(s) = s$, daher gilt $\text{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s, t\}$. Aus $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ und $W(0) = 0$ folgt auch, dass $\mathbf{E}W(t) = 0, t \geq 0$. Die Tatsache, dass W ein Gaußscher Prozess ist, folgt aus der Relation $Y = A^{-1}Z$, Punkt 1) des Beweises.

□

Definition 3.1.2

Der Prozess $\{W(t), t \geq 0\}$, $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))^T, t \geq 0$, heißt *d-dimensionale Brownsche Bewegung*, falls $W_i = \{W_i(t), t \geq 0\}$ unabhängige Wiener-Prozesse sind, $i = 1, \dots, d$.

Die obigen Definitionen und Übungsaufgabe 3.1.1 garantieren uns die Existenz eines Wiener-Prozesses mit stetigen Pfaden. Wie kann man aber eine explizite Konstruktion dieser Pfade angeben? Damit befassen wir uns im nächsten Abschnitt.

3.2 Explizite Konstruktion des Wiener-Prozesses

Konstruieren wir den Wiener-Prozess zunächst auf dem Intervall $[0, 1]$. Die Hauptidee der Konstruktion ist es, einen stochastischen Prozess $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ einzuführen, der auf einem Teilwahrscheinlichkeitsraum von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ definiert ist mit $X \stackrel{d}{=} W$, wobei $X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)Y_n, t \in [0, 1], \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsvariablen und $c_n(t) = \int_0^t H_n(s)ds, t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$, ist. Hier soll $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die orthonormierte Haar-Basis im $L_2([0, 1])$ sein, die jetzt kurz eingeführt wird.

3.2.1 Haar- und Schauder-Funktionen

Definition 3.2.1

Die Funktionen $H_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, heißen *Haar-Funktionen*, falls $H_1(t) = 1, t \in [0, 1], H_2(t) = 1_{[0, \frac{1}{2}]}(t) - 1_{(\frac{1}{2}, 1]}(t), H_k(t) = 2^{\frac{n}{2}}(1_{I_{n,k}}(t) - 1_{J_{n,k}}(t)), t \in [0, 1], 2^n < k \leq 2^{n+1}$, wobei $I_{n,k} = [a_{n,k}, a_{n,k} + 2^{-n-1}], J_{n,k} = (a_{n,k} + 2^{-n-1}, a_{n,k} + 2^{-n}], a_{n,k} = 2^{-n}(k - 2^n - 1), n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.2.1

Das Funktionssystem $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine orthonormierte Basis in $L^2([0, 1])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, $f, g \in L^2([0, 1])$.

Beweis Die Orthonormiertheit des Systems $\langle H_k, H_n \rangle = \delta_{kn}$, $k, n \in \mathbb{N}$ folgt unmittelbar aus der Definition 3.2.1. Zeigen wir die Vollständigkeit von $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Es genügt zu zeigen, dass für beliebige Funktion $g \in L^2([0, 1])$ mit $\langle g, H_n \rangle = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $g = 0$ fast überall auf $[0, 1]$ gilt. In der Tat kann die Indikator-Funktion eines Intervalls $1_{[a_n, k, a_n, k+2^{-n-1}]}$ stets als Linearkombination von H_n , $n \in \mathbb{N}$ aufgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} 1_{[0, \frac{1}{2}]} &= \frac{(H_1 + H_2)}{2}, \\ 1_{(\frac{1}{2}, 1]} &= \frac{(H_1 - H_2)}{2}, \\ 1_{[0, \frac{1}{4}]} &= \frac{(1_{[0, \frac{1}{2}]} + \frac{1}{\sqrt{2}}H_2)}{2}, \\ 1_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} &= \frac{(1_{[0, \frac{1}{2}]} - \frac{1}{\sqrt{2}}H_2)}{2}, \\ &\vdots \\ 1_{[a_n, k, a_n, k+2^{-n-1}]} &= \frac{(1_{a_n, k, a_n, k+2^{-n}} + 2^{-\frac{n}{2}}H_k)}{2}, \quad 2^n < k \leq 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt $\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} g(t)dt = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 1, \dots, 2^n - 1$, und deshalb $G(t) = \int_0^t g(s)ds = 0$ für $t = \frac{k}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 1, \dots, 2^n - 1$. Da G stetig auf $[0, 1]$ ist, folgt heraus $G(t) = 0$, $t \in [0, 1]$, und somit $g(s) = 0$ für fast jedes $s \in [0, 1]$. \square

Aus Lemma 3.2.1 folgt, dass zwei beliebige Funktionen $f, g \in L^2([0, 1])$ die Darstellungen $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, H_n \rangle H_n$ und $g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, H_n \rangle H_n$ haben (diese Reihen konvergieren im $L^2([0, 1])$) und $\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, H_n \rangle \langle g, H_n \rangle$ (Parseval-Identität).

Definition 3.2.2

Die Funktionen $S_n(t) = \int_0^t H_n(s)ds = \langle 1_{[0, t]}, H_n \rangle$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ heißen *Schauder-Funktionen*.

Lemma 3.2.2

Es gilt:

1. $S_n(t) \geq 0$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$,
2. $\sum_{k=1}^{2^n} S_{2^n+k}(t) \leq \frac{1}{2}2^{-\frac{n}{2}}$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$,
3. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen mit $a_n = O(n^\varepsilon)$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $n \rightarrow \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n(t)$ absolut und gleichmäßig in $t \in [0, 1]$ und ist folglich eine stetige Funktion auf $[0, 1]$.

Beweis 1. folgt unmittelbar aus Definition 3.2.2.

2. folgt aus der Tatsache, dass die Funktionen S_{2^n+k} für $k = 1, \dots, 2^n$ disjunkte Träger haben und $S_{2^n+k}(t) \leq S_{2^n+k}(\frac{2k-1}{2^{n+1}}) = 2^{-\frac{n}{2}-1}$, $t \in [0, 1]$.

3. Es genügt zu zeigen, dass $R_m = \sup_{t \in [0,1]} \sum_{k > 2^n} |a_k| S_k(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und ein $c > 0$ gilt $|a_k| \leq ck^\varepsilon$. Deshalb gilt für alle $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \leq c \cdot 2^{(n+1)\varepsilon} \cdot \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} S_k(t) \leq c \cdot 2^{(n+1)\varepsilon} \cdot 2^{-\frac{n}{2}-1} \leq c \cdot 2^{\varepsilon - n(\frac{1}{2} - \varepsilon)}.$$

Da $\varepsilon < \frac{1}{2}$, gilt $R_m \leq c \cdot 2^\varepsilon \sum_{n \geq m} 2^{-n(\frac{1}{2} - \varepsilon)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$. □

Lemma 3.2.3

Sei $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von (nicht unbedingt unabhängigen) Zufallsvariablen definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $Y_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $|Y_n| = O((\log n)^{\frac{1}{2}})$, $n \rightarrow \infty$.

Beweis Zu zeigen ist, dass für $c > \sqrt{2}$ und fast allen $\omega \in \Omega$ ein $n_0 = n_0(\omega, c) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|Y_n| \leq c(\log n)^{\frac{1}{2}}$ für $n \geq n_0$. Falls $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $x > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \left(-\frac{1}{y}\right) d\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{1}{y^2} dy\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

(Man kann auch zeigen, dass $\bar{\Phi}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \rightarrow \infty$.) Daher gilt für $c > \sqrt{2}$

$$\sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(|Y_n| > c(\log n)^{\frac{1}{2}}) \leq c^{-1} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \geq 2} (\log n)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{c^2}{2} \log n} = \frac{c^{-1} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \geq 2} (\log n)^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{c^2}{2}} < \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli (vgl. WR-Skript, Lemma 2.2.1) gilt $\mathbb{P}(\cap_n \cup_{k \geq n} A_k) = 0$, falls $\sum_k \mathbb{P}(A_k) < \infty$ mit $A_k = \{|Y_k| > c \cdot (\log k)^{\frac{1}{2}}\}$, $k \in \mathbb{N}$. Daher tritt A_k in unendlicher Anzahl nur mit Wahrscheinlichkeit 0, mit $|Y_n| \leq c(\log n)^{\frac{1}{2}}$ für $n \geq n_0$. □

3.2.2 Wiener-Prozess mit f.s. stetigen Pfaden

Lemma 3.2.4

Sei $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen. Seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von Zahlen mit $\sum_{k=1}^{2^m} |a_{2^m+k}| \leq 2^{-\frac{m}{2}}$, $\sum_{k=1}^{2^m} |b_{2^m+k}| \leq 2^{-\frac{m}{2}}$, $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren f.s. die Grenzwerte $U = \sum_{n=1}^\infty a_n Y_n$ und $V = \sum_{n=1}^\infty b_n Y_n$, $U \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^\infty a_n^2)$, $V \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^\infty b_n^2)$, wobei $\text{cov}(U, V) = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$. U und V sind genau dann unabhängig, wenn $\text{cov}(U, V) = 0$.

Beweis Aus Lemma 3.2.2 und 3.2.3 ergibt sich f.s. die Existenz der Grenzwerte U und V (ersetze dafür a_n durch Y_n und S_n durch z.B. b_n in Lemma 3.2.2). Aus der Faltungsstabilität der Normalverteilung folgt für $U^{(m)} = \sum_{n=1}^m a_n Y_n$, $V^{(m)} = \sum_{n=1}^m b_n Y_n$, dass $U^{(m)} \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^m a_n^2)$, $V^{(m)} \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^m b_n^2)$. Da $U^{(m)} \xrightarrow{d} U$, $V^{(m)} \xrightarrow{d} V$ folgt somit $U \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^\infty a_n^2)$, $V \sim$

$\mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2)$. Weiterhin, gilt

$$\begin{aligned} \text{cov}(U, V) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \text{cov}(U^{(m)}, V^{(m)}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m a_i b_j \text{cov}(Y_i, Y_j) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m a_i b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i, \end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, denn nach Lemma 3.2.3 gilt $|Y_n| \leq c \underbrace{(\log n)^{\frac{1}{2}}}_{\leq cn^\varepsilon, \varepsilon < \frac{1}{2}}$, für $n \geq \mathbb{N}_0$, und die majorisierende Reihe konvergiert nach Lemma 3.2.2:

$$\sum_{n,k=2^m}^{2^{m+1}} a_n b_k Y_n Y_k \stackrel{f.s.}{\leq} \sum_{n,k=2^m}^{2^{m+1}} a_n b_k c^2 n^\varepsilon k^\varepsilon \leq 2^{2\varepsilon(m+1)} \cdot 2^{-\frac{m}{2}} \cdot 2^{-\frac{m}{2}} = 2^{-(1-2\varepsilon)m}, \quad 1 - 2\varepsilon > 0.$$

Für ausreichend großes m gilt $\sum_{n,k=m}^{\infty} a_n b_k Y_n Y_k \leq \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-(1-2\varepsilon)j} < \infty$, und diese Reihe konvergiert f.s.

Zeigen wir nun

$$\text{cov}(U, V) = 0 \iff U \text{ und } V \text{ unabhängig}$$

Aus der Unabhängigkeit folgt immer die Unkorreliertheit von Zufallsvariablen. Zeigen wir hier das Gegenteil. Aus $(U^{(m)}, V^{(m)}) \xrightarrow{d} (U, V)$ folgt $\varphi_{(U^{(m)}, V^{(m)})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi_{(U, V)}$, also

$$\begin{aligned} \varphi_{(U^{(m)}, V^{(m)})}(s, t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp\left\{i \left(t \sum_{k=1}^m a_k Y_k + s \sum_{n=1}^m b_n Y_n \right)\right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp\left\{i \sum_{k=1}^m (ta_k + sb_k) Y_k\right\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \mathbb{E} \exp\{i(ta_k + sb_k) Y_k\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \exp\left\{-\frac{(ta_k + sb_k)^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ta_k + sb_k)^2}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right\} \exp\left\{ts \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k}_{\text{cov}(U, V)=0}\right\} \exp\left\{-\frac{s^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right\} = \varphi_U(t) \varphi_V(s), \end{aligned}$$

$s, t \in \mathbb{R}$. Daher sind U und V unabhängig, falls $\text{cov}(U, V) = 0$. □

Theorem 3.2.1

Sei $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen, die $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt sind, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann gibt es einen Teil-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mathbb{P})$ von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und einen stochastischen Prozess $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ darauf, so dass $X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n S_n(t)$, $t \in [0, 1]$, und $X \stackrel{d}{=} W$. Hierbei ist $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Familie der Schauder-Funktionen.

Beweis Nach Lemma 3.2.2, 2) erfüllen die Koeffizienten $S_n(t)$ für jedes $t \in [0, 1]$ die Bedingungen des Lemmas 3.2.4. Darüberhinaus existiert nach Lemma 3.2.3 eine Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$,

$\Omega_0 \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass für jedes $\omega \in \Omega_0$ die Relation $|Y_n(\omega)| = O(\sqrt{\log n})$, $n \rightarrow \infty$, gilt. Sei $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap \Omega_0$. Schränken wir den Wahrscheinlichkeitsraum auf $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mathbb{P})$ ein. Dann ist die Bedingung $a_n = Y_n(\omega) = O(n^\varepsilon)$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$, erfüllt, weil $\sqrt{\log n} < n^\varepsilon$ für ausreichend große n , und nach Lemma 3.2.2, 3) konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega) S_n(t)$ absolut und gleichmäßig in $t \in [0, 1]$ gegen die Funktion $X(\omega, t)$, $\omega \in \Omega_0$, die eine stetige Funktion in t für jedes $\omega \in \Omega_0$ ist. $X(\cdot, t)$ ist eine Zufallsvariable, weil nach Lemma 3.2.4 die Konvergenz dieser Reihe fast sicher gilt. Weiterhin, gilt $X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{\infty} S_n^2(t))$, $t \in [0, 1]$.

Zeigen wir, dass der so definierte stochastische Prozess auf $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mathbb{P})$ ein Wiener-Prozess ist. Dazu prüfen wir die Bedingungen der Definition 3.1.1. Betrachten wir beliebige Zeitpunkte $0 \leq t_1 < t_2, t_3 < t_4 \leq 1$ und berechnen wir

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X(t_2) - X(t_1), X(t_4) - X(t_3)) &= \text{cov}\left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(S_n(t_2) - S_n(t_1)), \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(S_n(t_4) - S_n(t_3))\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (S_n(t_2) - S_n(t_1))(S_n(t_4) - S_n(t_3)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\langle H_n, \mathbf{1}_{[0, t_2]} \rangle - \langle H_n, \mathbf{1}_{[0, t_1]} \rangle) \times \\
&\quad (\langle H_n, \mathbf{1}_{[0, t_4]} \rangle - \langle H_n, \mathbf{1}_{[0, t_3]} \rangle) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle H_n, \mathbf{1}_{[0, t_2]} - \mathbf{1}_{[0, t_1]} \rangle \langle H_n, \mathbf{1}_{[0, t_4]} - \mathbf{1}_{[0, t_3]} \rangle \\
&= \langle \mathbf{1}_{[0, t_2]} - \mathbf{1}_{[0, t_1]}, \mathbf{1}_{[0, t_4]} - \mathbf{1}_{[0, t_3]} \rangle \\
&= \langle \mathbf{1}_{[0, t_2]}, \mathbf{1}_{[0, t_4]} \rangle - \langle \mathbf{1}_{[0, t_1]}, \mathbf{1}_{[0, t_4]} \rangle \\
&\quad - \langle \mathbf{1}_{[0, t_2]}, \mathbf{1}_{[0, t_3]} \rangle + \langle \mathbf{1}_{[0, t_1]}, \mathbf{1}_{[0, t_3]} \rangle \\
&= \min\{t_2, t_4\} - \min\{t_1, t_4\} - \min\{t_2, t_3\} + \min\{t_1, t_3\},
\end{aligned}$$

weil $\langle \mathbf{1}_{[0, s]}, \mathbf{1}_{[0, t]} \rangle = \int_0^{\min\{s, t\}} du = \min\{s, t\}$, $s, t \in [0, 1]$. Falls $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 < 1$, dann gilt $\text{cov}(X(t_2) - X(t_1), X(t_4) - X(t_3)) = t_2 - t_1 - t_2 + t_1 = 0$, also sind die Zuwächse von X (nach Lemma 3.2.4) unkorreliert. Weiterhin gilt $X(0) \sim \mathcal{N}(0, \sum_{n=1}^{\infty} S_n^2(0)) = \mathcal{N}(0, 0)$, daher $X(0) \stackrel{f.s.}{=} 0$. Daraus folgt für $t_1 = 0, t_2 = t, t_3 = 0, t_4 = t$, dass $\text{var}(X(t)) = t$, $t \in [0, 1]$, und für $t_1 = t_3 = s, t_2 = t_4 = t$, dass $\text{var}(X(t) - X(s)) = t - s - s + s = t - s$, $0 \leq s < t \leq 1$. Somit gilt $X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, und nach Definition 3.1.1 gilt $X \stackrel{d}{=} W$. \square

Bemerkung 3.2.1 1. Theorem 3.2.1 bildet eine Grundlage für die approximative Simulation der Pfade einer Brownschen Bewegung durch die Teilsummen $X^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^n Y_k S_k(t)$, $t \in [0, 1]$, für ausreichend großes $n \in \mathbb{N}$.

2. Die Konstruktion in Theorem 3.2.1 kann verwendet werden, um den Wiener-Prozess mit stetigen Pfaden auf einem Intervall $[0, t_0]$, für beliebiges $t_0 > 0$ zu erzeugen. Falls $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$ ein Wiener-Prozess auf $[0, 1]$ ist, dann ist $Y = \{Y(t), t \in [0, t_0]\}$ mit $Y(t) = \sqrt{t_0} W(\frac{t}{t_0})$, $t \in [0, t_0]$, ein Wiener-Prozess auf $[0, t_0]$.

Aufgabe 3.2.1

Beweisen Sie es.

3. Der Wiener-Prozess W mit stetigen Pfaden auf \mathbb{R}_+ kann wie folgt explizit konstruiert werden. Seien $W^{(n)} = \{W^{(n)}(t), t \in [0, 1]\}$ unabhängige Kopien des Wiener-Prozesses

wie in Theorem 3.2.1. Definiere $W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(t \in [n-1, n]) [\sum_{k=1}^{n-1} W^{(k)}(1) - W^{(n)}(t - (n-1))]$, $t \geq 0$, also,

$$W(t) = \begin{cases} W^{(1)}(t), & t \in [0, 1], \\ W^{(1)}(1) + W^{(2)}(t-1), & t \in [1, 2], \\ W^{(1)}(1) + W^{(2)}(1) + W^{(3)}(t-2), & t \in [2, 3], \\ \text{usw.} \end{cases}$$

Aufgabe 3.2.2

Zeigen Sie, dass der so eingeführte stochastische Prozess $W = \{W(t), t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess auf \mathbb{R}_+ ist.

3.3 Verteilungs- und Pfadeseigenschaften vom Wiener-Prozess

3.3.1 Verteilung des Maximums

Theorem 3.3.1

Sei $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$ ein Wiener-Prozess über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt:

$$\mathbb{P} \left(\max_{t \in [0,1]} W(t) > x \right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad (3.3.1)$$

für alle $x \geq 0$.

Die in 3.3.1 gegebene Abbildung $\max_{t \in [0,1]} W(t) : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ ist eine wohldefinierte Zufallsvariable, denn es gilt: $\max_{t \in [0,1]} W(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i=1, \dots, k} W(\frac{i}{k}, \omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, weil die Trajektorien von $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ stetig sind. Aus 3.3.1 folgt, dass $\max_{t \in [0,1]} W(t)$ einen exponentiell beschränkten Tail hat: somit hat $\max_{t \in [0,1]} W(t)$ endliche k -te Momente.

Hilfsmittel für Beweis von Theorem 3.3.1

Sei $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ ein Wiener-Prozess und Z_1, Z_2, \dots eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$ für alle $i \geq 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\{\tilde{W}^n(t), t \in [0, 1]\}$ durch $\tilde{W}^n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} + (nt - \lfloor nt \rfloor) \frac{Z_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sqrt{n}}$, wobei $S_i = Z_1 + \dots + Z_i$, $i \geq 1$, $S_0 = 0$.

Lemma 3.3.1

Für jedes $k \geq 1$ und beliebige $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ gilt:

$$\left(\tilde{W}^n(t_1), \dots, \tilde{W}^n(t_k) \right)^\top \xrightarrow{d} \left(W(t_1), \dots, W(t_k) \right)^\top.$$

Beweis Spezialfall $k = 2$ (für $k > 2$ verläuft der Beweis analog). Sei $t_1 < t_2$. Für alle $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} s_1 \tilde{W}^n(t_1) + s_2 \tilde{W}^n(t_2) &= (s_1 + s_2) \frac{S_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{\sqrt{n}} + s_2 \frac{(S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor + 1})}{\sqrt{n}} \\ &\quad + Z_{\lfloor nt_1 \rfloor + 1} \left((nt_1 - \lfloor nt_1 \rfloor) \frac{s_1}{\sqrt{n}} + \frac{s_2}{\sqrt{n}} \right) \\ &\quad + Z_{\lfloor nt_2 \rfloor + 1} (nt_2 - \lfloor nt_2 \rfloor) \frac{s_2}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{i(s_1 \tilde{W}^{(n)}(t_1) + s_2 \tilde{W}^{(n)}(t_2))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{i \frac{s_1 + s_2}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt_1 \rfloor}} \mathbb{E} e^{i \frac{s_2}{\sqrt{n}} (S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor + 1})} \\
&= \left| \mathbb{E} e^{i \frac{s_1 + s_2}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt_1 \rfloor}} = \varphi_{S_{\lfloor nt_1 \rfloor}} \left(\frac{s_1 + s_2}{\sqrt{n}} \right) = \left(\varphi_{Z_1} \left(\frac{s_1 + s_2}{\sqrt{n}} \right) \right)^{\lfloor nt_1 \rfloor} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\varphi_{Z_1} \left(\frac{s_1 + s_2}{\sqrt{n}} \right) \right)^{\lfloor nt_1 \rfloor} \left(\varphi_{Z_1} \left(\frac{s_2}{\sqrt{n}} \right) \right)^{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor - 1} \\
&= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{s^2}{2}} \right| \\
&= e^{-\frac{(s_1^2 t_1 + 2s_1 s_2 \min\{t_1, t_2\} + s_2^2 t_2)}{2}} \\
&= \varphi_{(W(t_1), W(t_2))}(s_1, s_2),
\end{aligned}$$

wobei $\varphi_{(W(t_1), W(t_2))}$ die charakteristische Funktion von $(W(t_1), W(t_2))$ ist. \square

Lemma 3.3.2

Sei $\tilde{W}^{(n)} = \max_{t \in [0, 1]} \tilde{W}^{(n)}(t)$. Dann gilt:

$$\tilde{W}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k=1, \dots, n} S_k, \quad \text{für alle } n = 1, 2, \dots$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tilde{W}^{(n)} \leq x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

Ohne Beweis

Beweis von Theorem 3.3.1

Aus Lemma 3.3.1 folgt für $x \geq 0$, $k \geq 1$ und $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\max_{t \in \{t_1, \dots, t_k\}} \tilde{W}^{(n)}(t) > x \right) &= \mathbb{P} \left(\max_{t \in \{t_1, \dots, t_k\}} W(t) > x \right) \\
\Rightarrow \mathbb{P} \left(\max_{t \in [0, 1]} \tilde{W}^{(n)}(t) > x \right) &\geq \mathbb{P} \left(\max_{t \in \{t_1, \dots, t_k\}} W(t) > x \right).
\end{aligned}$$

Mit $(t_1, \dots, t_k)^\top = \left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{k}{k}\right)^\top$ und $\max_{t \in [0, 1]} W(t, \omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{i=1, \dots, k} W\left(\frac{1}{k}, \omega\right)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\max_{t \in [0, 1]} \tilde{W}^{(n)}(t) > x \right) \geq \mathbb{P} \left(\max_{t \in [0, 1]} W(t) > x \right).$$

Aus Lemma 3.3.2 folgt die Behauptung. \square

Korollar 3.3.1

Sei $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ ein Wiener-Prozess. Dann gilt:

$$\mathbb{P} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} = 0 \right) = 1.$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\left| \frac{W(t)}{t} - \frac{W(n)}{n} \right| &\leq \left| \frac{W(t)}{t} - \frac{W(n)}{t} \right| + \left| \frac{W(n)}{t} - \frac{W(n)}{n} \right| \\
&\leq |W(n)| \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{n} \right| + \frac{1}{n} \sup_{t \in [n, n+1]} |W(t) - W(n)| \\
&\leq \frac{2}{n} |W(n)| - \frac{Z(n)}{n},
\end{aligned}$$

wobei $Z(n) = \sup_{t \in [0,1]} |W(n+t) - W(n)|$, $t \in [n, n+1]$. Es gilt

$$\frac{2}{n} |W(n)| = \frac{2}{n} \left| \sum_{i=1}^{\infty} (W(i) - W(i-1)) \right| \xrightarrow{f.s.} 2 |\mathbb{E}W(1)| = 0.$$

Wir zeigen, dass $\mathbb{E}Z(1) < \infty$.

$$\mathbb{P}(Z(1) > x) \leq \mathbb{P}\left(\max_{t \in [0,1]} W(t) > x\right) + \mathbb{P}\left(\max_{t \in [0,1]} (-W(t)) > x\right) = 2\mathbb{P}\left(\max_{t \in [0,1]} W(t) > x\right),$$

weil $\{-W(t), t \in [0, 1]\}$ auch ein Wiener-Prozess ist. Es gilt

$$\mathbb{P}(Z(1) > x) \leq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad \text{und somit} \quad \frac{Z(n)}{n} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt $\frac{W(t)}{t} \xrightarrow{f.s.} 0$ für $t \rightarrow \infty$. □

3.3.2 Invarianzeigenschaften

Bestimmte Transformationen des Wiener-Prozesses führen wieder zu einem Wiener-Prozess.

Theorem 3.3.2

Sei $\{W(t), t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Dann sind die stochastischen Prozesse $\{Y^{(i)}(t), t \geq 0\}$, $i = 1, \dots, 4$, mit

$$\begin{aligned}
Y^{(1)}(t) &= -W(t), && \text{(Symmetrie)} \\
Y^{(2)}(t) &= W(t+t_0) - W(t_0) \quad \text{für ein } t_0 > 0, && \text{(Verschiebung des Nullpunktes)} \\
Y^{(3)}(t) &= \sqrt{c}W\left(\frac{t}{c}\right) \quad \text{für ein } c > 0, && \text{(Skalierung)} \\
Y^{(4)}(t) &= \begin{cases} tW\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases} && \text{(Spiegelung bei } t = 0)
\end{aligned}$$

ebenfalls Wiener-Prozesse.

- Beweis**
1. $Y^{(i)}$, $i = 1, \dots, 4$, haben unabhängige Zuwächse mit $Y^{(i)}(t_2) - Y^{(i)}(t_1) \sim \mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$.
 2. $Y^{(i)}(0) = 0$, $i = 1, \dots, 4$.
 3. $Y^{(i)}$, $i = 1, \dots, 3$, haben stetige Trajektorien. $\{Y^{(i)}(t), t \geq 0\}$ hat stetige Trajektorien für $t > 0$.

4. Es ist zu zeigen, dass $\lim_{t \rightarrow 0} tW(\frac{1}{t}) = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} tW(\frac{1}{t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} \stackrel{f.s.}{=} 0 \text{ wegen Korollar 3.3.1.}$$

□

Korollar 3.3.2

Sei $\{W(t), t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Dann gilt:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W(t) = \infty \right) = \mathbb{P} \left(\inf_{t \geq 0} W(t) = -\infty \right) = 1.$$

Beweis Für $x, c > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W(t) > x \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W \left(\frac{t}{c} \right) > \frac{x}{\sqrt{c}} \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W(t) > \frac{x}{\sqrt{c}} \right) \\ \Rightarrow \mathbb{P} \left(\left\{ \sup_{t \geq 0} W(t) = 0 \right\} \cup \left\{ \sup_{t \geq 0} W(t) = \infty \right\} \right) &= \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} W(t) = 0) + \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} W(t) = \infty) = 1. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W(t) = 0 \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W(t) \leq 0 \right) \leq \mathbb{P} \left(W(t) \leq 0, \sup_{t \geq 1} W(t) \leq 0 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(W(1) \leq 0, \sup_{t \geq 1} (W(t) - W(1)) \leq -W(1) \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 1} W(t) - W(1) \leq -W(1) \mid W(1) = x \right) \mathbb{P}(W(1) \in dx) \\ &= \int_{-\infty}^0 \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} (W(t) - W(1)) \leq -x \mid W(1) = x \right) \mathbb{P}(W(1) \in dx) \\ &= \int_{-\infty}^0 \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W(t) = 0 \right) \mathbb{P}(W(1) \in dx) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W(t) = 0 \right) \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also $\mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W(t) = 0 \right) = 0$ und somit $\mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} W(t) = \infty \right) = 1$.

Analog kann man zeigen, dass $\mathbb{P} \left(\inf_{t \geq 0} W(t) = -\infty \right) = 1$.

□

Bemerkung 3.3.1

$\mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} X(t) = \infty, \inf_{t \geq 0} X(t) = -\infty \right) = 1$ bedeutet, dass die Trajektorien von W unendlich oft zwischen positiven und negativen Werten auf $[0, \infty)$ oszillieren.

Korollar 3.3.3

Sei $\{W(t), t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ ist nirgendwo differenzierbar in } [0, \infty)) = 1.$$

Beweis

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ ist nirgendwo differenzierbar in } [0, \infty)\} \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ ist nirgendwo differenzierbar in } [n, n+1)\}. \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{P}(\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ differenzierbar für ein } t_0 = t_0(\omega) \in [0, 1]) = 0$.
Definiere die Menge

$$A_{nm} = \left\{ \omega \in \Omega : \text{es gibt ein } t_0 = t_0(\omega) \in [0, 1] \text{ mit } |X(t_0\omega + h, \omega) - W(t_0(\omega), \omega)| \leq mh, \forall h \in \left[0, \frac{4}{k}\right] \right\}.$$

Dann gilt

$$\{\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ differenzierbar für ein } t_0 = t_0(\omega)\} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} A_{nm}.$$

Zu zeigen bleibt $\mathbb{P}(\bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} A_{nm}) = 0$.

Sei $k_0(\omega) = \min_{k=1,2,\dots} \left\{ \frac{k}{n} \geq t_0(\omega) \right\}$. Dann gilt für $\omega \in A_{nm}$ und $j = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} \left| W\left(\frac{k_0(\omega) + j + 1}{n}, \omega\right) - W\left(\frac{k_0(\omega) + j}{n}, \omega\right) \right| &\leq \left| W\left(\frac{k_0(\omega) + j + 1}{n}, \omega\right) - W(t_0(\omega), \omega) \right| \\ &\quad + \left| W\left(\frac{k_0(\omega) + j}{n}, \omega\right) - W(t_1(\omega), \omega) \right| \\ &\leq \frac{8m}{n}. \end{aligned}$$

Sei $\Delta_0(k) = W\left(\frac{k+1}{n}\right) - W\left(\frac{k}{n}\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{nm}) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n \bigcup_{j=0}^2 |\Delta_n(k+j)| \leq \frac{8m}{n}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^2 |\Delta_n(k+j)| \leq \frac{8m}{n}\right) = \mathbb{P}\left(|\Delta_n(0)| \leq \frac{8m}{n}\right) \\ &\leq (n+1) \left(\frac{16m}{\sqrt{2\pi n}}\right)^3 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und weil $A_{nm} \subset A_{n+1,m}$ gilt, folgt $\mathbb{P}(A_{nm}) = 0$. □

Korollar 3.3.4

Mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt:

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{0 \leq t_0 < \dots < t_n \leq 1} \sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})| = \infty,$$

d.h. $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ hat f.s. Trajektorien mit unbeschränkter Variation.

Beweis Weil jede stetige Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränkter Variation fast überall differenzierbar ist, ergibt sich die Behauptung aus Korollar 3.3.3.

Alternativer Beweis

Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left| W\left(\frac{it}{2^n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right) \right| = \infty$.

Sei $Z_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(W\left(\frac{it}{2^n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right) \right)^2 - t$. Daraus folgt $\mathbb{E}Z_n = 0$ und $\mathbb{E}Z_n^2 = t^2 2^{-n+1}$ und mit der Tschebyschev-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|Z_n| < \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}Z_n^2}{\varepsilon^2} = \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 2^{-n+1}, \quad \text{d.h.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) \stackrel{f.s.}{=} 0.$$

Aus dem Lemma von Borel-Cantelli ergibt sich, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$ fast sicher und somit

$$\begin{aligned} 0 \leq t &\leq \sum_{i=1}^{2^n} \left(W\left(\frac{it}{2^n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right) \right)^2 \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq 2^n} \left| W\left(\frac{kt}{2^n}\right) - W\left(\frac{(k-1)t}{2^n}\right) \right| \sum_{i=1}^{2^n} \left| W\left(\frac{it}{2^n}\right) - W\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right) \right|. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, weil W stetige Trajektorien hat und deshalb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq 2^n} \left| W\left(\frac{kt}{2^n}\right) - W\left(\frac{(k-1)t}{2^n}\right) \right| = 0.$$

□

Literaturverzeichnis

- [1] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [2] A. A. Borovkov. *Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine Einführung*. Birkhäuser, Basel, 1976.
- [3] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I/II*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1970/71.
- [4] P. Gänszler and W. Stute. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, Berlin, 1977.
- [5] G. Grimmett and D. Stirzaker. *Probability and random processes*. Oxford University Press, New York, 2001.
- [6] C. Hesse. *Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vieweg, Braunschweig, 2003.
- [7] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Springer, New York, 2002.
- [8] J. F. C. Kingman. *Poisson processes*. Oxford University Press, New York, 1993.
- [9] N. Krylov. *Introduction to the theory of random processes*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [10] S. Resnick. *Adventures in stochastic processes*. Birkhäuser, Boston, MA, 1992.
- [11] G. Samorodnitsky and M. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes*. Chapman & Hall, New York, 1994.
- [12] K.-I. Sato. *Lévy Processes and Infinite Divisibility*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [13] A. N. Shiryaev. *Probability*. Springer, New York, 1996.
- [14] A. V. Skorokhod. *Basic principles and applications of probability theory*. Springer, Berlin, 2005.
- [15] J. Stoyanov. *Counterexamples in probability*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.
- [16] A. D. Wentzel. *Theorie zufälliger Prozesse*. Birkhäuser, Basel, 1979.