Aufgabe 5

Sei $g(t) = \begin{cases} \lambda_1 t & , \quad t \leq X \\ \lambda_1 X + \lambda_2 (t - X) & \quad t > X \end{cases}$

wähle $N'(t) = \begin{cases} N^{(1)}\left(\frac{t}{\lambda_1}\right) & , \quad \frac{t}{\lambda_1} \leq X \\ N^{(1)}(X) + N^{(2)}\left(\frac{t - \lambda_1 X}{\lambda_2}\right) & , \quad \frac{t}{\lambda_1} > X \end{cases}$

Dann ergibt sich der gewünschte Prozess, d.h

$$N(t) = N'(g(t)) = \begin{cases} N^{(1)}(t) & , \quad t \leq X \\ N^{(1)}(X) + N^{(2)}(t - X) & , \quad t > X \end{cases}$$

Wir prüfen nun die Voraussetzungen von Theorem

i) zz: $N'(t) \sim \text{Pois}(1 \cdot t) \quad \forall t \geq 0$

$$\mathbb{P}(N'(t) = k) = \int_0^{t/\lambda_1} \mathbb{P}\left(N^{(1)}(x) + N^{(2)}\left(\frac{t - \lambda_1 x}{\lambda_2}\right) = k\right) dF_X(x) + \int_{t/\lambda_1}^{\infty} \mathbb{P}\left(N^{(1)}\left(\frac{t}{\lambda_1}\right) = k\right) dF_X(x)$$

$$= \int_0^{t/\lambda_1} \frac{(\lambda_1 x + t - \lambda_1 x)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 x + t - \lambda_1 x)} dF_X(x) + \int_{t/\lambda_1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-t} dF_X(x)$$

$$= \int_0^{\infty} dF_X(x) \cdot \frac{t^k}{k!} e^{-t} = \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$

2

ii) z.z.: $\{N'(t), t \geq 0\}$ besitzt stationäre und unabhängige Zuwächse

Sei o.B.d.A. $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < t_0 < t_1$: (der allg. Fall gilt analog)

$$\mathbb{P}(N'(t_1) - N'(t_0) = n,\ N'(t_0) = m)$$

$$= \int_0^{t_0/\lambda_1} \mathbb{P}\Big(N^{(1)}(x) + N^{(2)}\Big(\frac{t_1-\lambda_1 x}{\lambda_2}\Big) - \Big(N^{(1)}(x) + N^{(2)}\Big(\frac{t_0-\lambda_1 x}{\lambda_2}\Big)\Big) = n,$$
$$N^{(1)}(x) + N^{(2)}\Big(\frac{t_0-\lambda_1 x}{\lambda_2}\Big) = m\Big)\, dF_X(x)$$

$$+ \int_{t_0/\lambda_1}^{t_1/\lambda_1} \mathbb{P}\Big(N^{(1)}(x) + N^{(2)}\Big(\frac{t_1-\lambda_1 x}{\lambda_2}\Big) - N^{(1)}(t_0/\lambda_1) = n,\ N^{(1)}\Big(\frac{t_0}{\lambda_1}\Big) = m\Big)\, dF_X(x)$$

$$+ \int_{t_1/\lambda_1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(N^{(1)}\Big(\frac{t_1}{\lambda_1}\Big) - N^{(1)}\Big(\frac{t_0}{\lambda_1}\Big) = n,\ N^{(1)}\Big(\frac{t_0}{\lambda_1}\Big) = m\Big)\, dF_X(x)$$

$$= \int_0^{t_0/\lambda_1} \mathbb{P}\Big(N^{(2)}\Big(\frac{t_1-t_0}{\lambda_2}\Big) = n\Big)\, \mathbb{P}\Big(N^{(1)}(x) + N^{(2)}\Big(\frac{t_0-\lambda_1 x}{\lambda_2}\Big) = m\Big)\, dF_X(x)$$

$$+ \int_{t_0/\lambda_1}^{t_1/\lambda_1} \mathbb{P}\Big(N^{(1)}\Big(\frac{\lambda_1 x - t_0}{\lambda_1}\Big) + N^{(2)}\Big(\frac{t_1-\lambda_1 x}{\lambda_2}\Big) = n\Big)\, \mathbb{P}\Big(N^{(1)}\Big(\frac{t_0}{\lambda_1}\Big) = m\Big)\, dF_X(x)$$

$$+ \int_{t_1/\lambda_1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(N^{(1)}\Big(\frac{t_1-t_0}{\lambda_1}\Big) = n\Big)\, \mathbb{P}\Big(N^{(1)}\Big(\frac{t_0}{\lambda_1}\Big) = m\Big)\, dF_X(x)$$

$$= \int_0^{t_0/\lambda_1} \frac{(t_1-t_0)^n}{n!} e^{-(t_1-t_0)} \cdot \frac{(\lambda_1 x + t_0 - \lambda_1 x)^m}{m!} e^{-(\lambda_1 x + t_0 - \lambda_1 x)}\, dF_X(x)$$

$$+ \int_{t_0/\lambda_1}^{t_1/\lambda_1} \frac{(\lambda_1 x + t_1 - t_0 - \lambda_1 x)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 x + t_1 - t_0 - \lambda_1 x)} \frac{t_0^m}{m!} e^{-t_0}\, dF_X(x)$$

$$+ \int_{t_1/\lambda_1}^{\infty} \frac{(t_1-t_0)^n}{n!} e^{-(t_1-t_0)} \frac{t_0^m}{m!} e^{-t_0}\, dF_X(x)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(t_1-t_0)^n}{n!} e^{-(t_1-t_0)} \frac{t_0^m}{m!} e^{-t_0}\, dF_X(x) \overset{(i)}{=} \mathbb{P}(N'(t_1) - N'(t_0) = n)\,\mathbb{P}(N'(t_0) = m)$$

Lässt man nun die Bedingung $N'(t_0) = m$ weg und ersetzt am Anfang t_0 durch $t_0 + h$ bzw. t_1 durch $t_1 + h$, dann heben sich mit der gleichen Rechnung die h am Ende weg und man erhält die Stationarität der Zuwächse.

iii) zz: $\{N'(t), t \geq 0\}$ und $\{\lambda(t), t \geq 0\}$ unabhängig

$$\mathbb{P}(N'(t) \leq n, X \leq y) = \int_0^y \mathbb{P}(N'(t) \leq n \mid X = x)\, dF_X(x)$$

$$= \int_0^{t/\lambda_1} \mathbb{P}\left(N^{(1)}(x) + N^{(2)}\left(\frac{t-\lambda_1 x}{\lambda_2}\right) \leq n\right) \mathbb{I}\{x \leq y\}\, dF_X(x)$$

$$+ \int_{t/\lambda_1}^{y} \mathbb{P}\left(N^{(1)}\left(\frac{t}{\lambda_1}\right) \leq n\right) dF_X(x)\, \mathbb{I}\left\{y > \frac{t}{\lambda_1}\right\}$$

$$= \int_0^{t/\lambda_1} \mathbb{I}\{x \leq y\}\, dF_X(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1 x + t - \lambda_1 x)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 x + t - \lambda_1 x)}$$

$$+ \int_{t/\lambda_1}^{y} dF_X(x)\, \mathbb{I}\left\{y > \frac{t}{\lambda_1}\right\} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$

$$\overset{(i)}{=} \mathbb{P}(X \leq y)\, \mathbb{P}(N'(t) \leq n)$$

$\Rightarrow$ $X, N(t)$ unabhängig $\forall t \geq 0$. Der Fall $X, (N(t_1), \dots, N(t_k))$ für $t_1, \dots, t_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ folgt analog, jedoch mit wesentlich aufwändigerer Notation.