Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Florian Timmermann

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 1

für die Übungen am 27. Oktober 2010 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Behauptung: Die Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \geq 1$, $t = (t_1, \ldots, t_n)^\top \in T^n$ erfüllt die Bedingungen des Theorems von Kolmogorov genau dann, wenn für alle $n \geq 2$ und für alle $s = (s_1, \ldots, s_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\varphi_{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}}((s_1, \ldots, s_n)^\top) = \varphi_{\mathsf{P}_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}}((s_{\pi(1)}, \ldots, s_{\pi(n)})^\top)$ für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$.

(b) $\varphi_{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}}((s_1, \ldots, s_{n-1})^\top) = \varphi_{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}}((s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)^\top)$.

Bemerkung: $\varphi(\cdot)$ bezeichnet die charakteristische Funktion des jeweiligen Maßes. $\mathcal{S}_n$ bezeichnet die Gruppe aller Permutationen $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie die Existenz einer zufälligen Funktion, deren endlich-dimensionale Verteilungen multivariat normalverteilt sind, und geben Sie die messbaren Räume $(E_{t_1,\ldots,t_n}, \mathcal{E}_{t_1,\ldots,t_n})$ explizit an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$, welche nicht die Bedingungen des Theorems von Kolmogorov erfüllt.