Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Wolfgang Karcher

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 10

für die Übungen am 12. Januar 2011 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Der Lévy-Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ sei ein Gamma-Prozess mit Parametern $b, p > 0$, das heißt, für jedes $t \geq 0$ gelte $X(t) \sim \Gamma(b, pt)$. Zeige, dass $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Subordinator ist mit dem Laplace-Exponenten $\xi(u) = \int_0^\infty (1 - e^{-uy})\nu(dy)$ für $\nu(dy) = py^{-1}e^{-by}dy$, $y > 0$. (Der Laplace-Exponent von $\{X(t), t \geq 0\}$ ist die Funktion $\xi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, für die $\mathsf{E}e^{-uX(t)} = e^{-t\xi(u)}$ für beliebige $t, u \geq 0$ gilt)

Aufgabe 2 (4 + 4 Punkte)

Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Lévy-Exponenten η und $\{\tau(s), s \geq 0\}$ ein unabhängiger Subordinator mit charakteristischem Lévy-Exponenten γ. Der stochastische Prozess Y sei definiert durch $Y = \{X(\tau(s)), s \geq 0\}$.

(a) Zeige, dass

$$\mathsf{E}\left(e^{i\theta Y(\tau(s))}\right) = e^{\gamma(-i\eta(\theta))s}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

wobei $\Im z$ den Imaginärteil von z bezeichnet.

Hinweis: Weil τ ein Prozess mit nicht-negativen Werten ist, gilt $\mathsf{E}e^{i\theta\tau(s)} = e^{\gamma(\theta)s}$ für alle $\theta \in \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$ durch analytische Fortsetzung in Theorem 4.1.3.

(b) Zeige, dass Y ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Lévy-Exponenten $\gamma(-i\eta(\cdot))$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Lévy-Maß

$$\nu(dx) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\lambda, \sigma > 0$. Zeige, dass $\{\sigma W(N(t)), t \geq 0\}$ die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungen wie X hat, wobei $\{N(s), s \geq 0\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität 2λ und W ein von N unabhängiger Standard-Wiener-Prozess ist.

Hinweise zu Aufgabe 2(a) und Aufgabe 3:

- Zur Berechnung des Erwartungswertes für die charakteristische Funktion kann die Identität $\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(X|Y)) = \int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}(X|Y = y) F_Y(dy)$ für zwei Zufallsvariablen X und Y benutzt werden. Dabei sollte auf $\tau(s)$ bedingt werden.
- $\int_{-\infty}^\infty \cos(sy) e^{-\frac{y^2}{2a}} dy = \sqrt{2\pi a} \cdot e^{-\frac{as^2}{2}}$ für $a > 0$ und $s \in \mathbb{R}$.