Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Wolfgang Karcher

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 11

für die Übungen am 19. Januar 2011 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei W ein Standard-Wiener-Prozess und τ ein unabhängiger $\frac{\alpha}{2}$-stabiler Subordinator, wobei $\alpha \in (0,2)$. Zeige, dass $\{W(\tau(s)), s \geq 0\}$ ein α-stabiler Lévy-Prozess ist.

Aufgabe 2 ($2+1+1+2+1+1+3$ Punkte)

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ mit

$$\mathsf{E}|X| < \infty, \quad \mathsf{E}|Y| < \infty, \quad \mathsf{E}|XY| < \infty,$$

und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine beliebige Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Dann gilt

(a) $\mathsf{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathsf{E}X, \mathsf{E}(X|\mathcal{F}) = X$,

(b) $\mathsf{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathsf{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathsf{E}(Y|\mathcal{G})$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$,

(c) $\mathsf{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathsf{E}(Y|\mathcal{G})$, falls $X \leq Y$,

(d) $\mathsf{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathsf{E}(X|\mathcal{G})$, falls Y eine $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbare Zufallsvariable ist,

(e) $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathsf{E}(X|\mathcal{G}_1)$, falls $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ sind mit $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$,

(f) $\mathsf{E}(X|\mathcal{G}) = \mathsf{E}X$, falls die σ-Algebra $\mathcal{G}$ und $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ unabhängig sind, d. h., falls $\mathsf{P}(A \cap A') = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(A')$ für beliebige $A \in \mathcal{G}$ und $A' \in \sigma(X)$.

(g) $\mathsf{E}(f(X)|\mathcal{G}) \geq f(\mathsf{E}(X|\mathcal{G}))$, falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist, so dass $\mathsf{E}|f(X)| < \infty$.

Aufgabe 3 ($2+2+2$ Punkte)

Betrachte die zwei Zufallsvariablen X und Y über dem Wahrscheinlichkeitsraum $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \frac{1}{2}\nu)$ mit $\mathsf{E}|X| < \infty$, wobei ν das Lebesguemaß auf $[-1,1]$ bezeichnet. Bestimme für die folgenden Zufallsvariablen jeweils $\sigma(Y)$ und eine Version der bedingten Erwartung $\mathsf{E}(X|Y)$.

(a) $Y(\omega) = \omega^5$ (Hinweis: Zeige zunächst, dass $\sigma(Y) = \mathcal{B}([-1,1])$)

(b) $Y(\omega) = (-1)^k$ für $\omega \in \left[\frac{k-3}{2}, \frac{k-2}{2}\right)$, $k = 1, \ldots, 4$ und $Y(1) = 1$
(Hinweis: Es gilt $\mathsf{E}(X|B) = \frac{\mathsf{E}(X\mathbb{1}_B)}{\mathsf{P}(B)}$ für $B \in \sigma(Y)$ mit $\mathsf{P}(B) > 0$)

(c) Berechne die Verteilung von $\mathsf{E}(X|Y)$ in (a) und (b), falls $X \sim U[-1,1]$.