Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Wolfgang Karcher

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 12

für die Übungen am 26. Januar 2011 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeige, dass der Subordinator T mit Randdichte

$$f_{T(t)}(s) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{4s}} 1\{s > 0\}$$

ein $\frac{1}{2}$-stabiler Subordinator ist. (Hinweis: Differenziere die Laplace-Transformierte von $T(t)$ und löse die Differentialgleichung)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien X und Y Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Die bedingte Varianz $\mathsf{var}(Y|X)$ ist definiert durch

$$\mathsf{var}(Y|X) = \mathsf{E}((Y - \mathsf{E}(Y|X))^2|X).$$

Zeige, dass

$$\mathsf{var}\, Y = \mathsf{E}(\mathsf{var}(Y|X)) + \mathsf{var}(\mathsf{E}(Y|X)).$$

Aufgabe 3 $(3 + 3$ Punkte)

Für eine Stoppzeit τ definieren wir die gestoppte σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ wie folgt:

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für beliebige } t \geq 0\}.$$

Seien nun S und T Stoppzeiten bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Zeige:

(a) $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T \; \forall A \in \mathcal{F}_S$

(b) $\mathcal{F}_{\min\{S,T\}} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$

Aufgabe 4 $(2 + 3$ Punkte)

(a) Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Martingal. Zeige, dass $\mathsf{E}X(t) = \mathsf{E}X(0)$ für alle $t \geq 0$ gilt.

(b) Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Sub- bzw. Supermartingal. Zeige, dass $\mathsf{E}X(t) \geq \mathsf{E}X(0)$ bzw. $\mathsf{E}X(t) \leq \mathsf{E}X(0)$ für alle $t \geq 0$ gilt.