Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Wolfgang Karcher

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 13

für die Übungen am 2. Februar 2011 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Der stochastische Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ sei adaptiert und càdlàg. Zeige, dass

$$\mathsf{P}(\sup_{0\leq v\leq t} X(v) > x) \leq \frac{\mathsf{E}X(t)^2}{x^2 + \mathsf{E}X(t)^2}$$

für beliebige $x > 0$ und $t \geq 0$ gilt, falls X ein Submartingal mit $\mathsf{E}X(t) = 0$ und $\mathsf{E}X(t)^2 < \infty$ ist.

Aufgabe 2 ($3 + 4$ Punkte)

(a) Sei $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine monoton wachsende Funktion mit

$$\frac{g(x)}{x} \to \infty, \quad x \to \infty.$$

Zeige, dass die Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Zufallsvariablen gleichgradig integrierbar ist, falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}g(|X_n|) < \infty$.

(b) Sei $X = \{X(n), n \in \mathbb{N}\}$ ein Martingal. Zeige, dass die Folge von Zufallsvariablen $X(T \wedge 1), X(T \wedge 2), \ldots$ für jede endliche Stoppzeit T gleichgradig integrierbar ist, falls $\mathsf{E}|X(T)| < \infty$ und $\mathsf{E}(|X(n)|\mathbb{1}_{\{T>n\}}) \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 3 ($3 + 3$ Punkte)

Sei $S = \{S_n = a + \sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}\}$ eine symmetrische zufällige Irrfahrt mit $a > 0$ und $\mathsf{P}(X_i = 1) = \mathsf{P}(X_i = -1) = 1/2$ für $i \in \mathbb{N}$. Die zufällige Irrfahrt wird zu demjenigen Zeitpunkt T gestoppt, bei dem sie zum ersten Mal einen der beiden Werte 0 und $K > a$ unter- bzw. überschreitet, d. h.

$$T = \min_{k\geq 0}\{S_k \leq 0 \text{ oder } S_k \geq K\}.$$

Zeige, dass $M_n = \sum_{i=0}^n S_i - \frac{1}{3}S_n^3$ ein Martingal ist und $\mathsf{E}(\sum_{i=0}^T S_i) = \frac{1}{3}(K^2 - a^2)a + a$ gilt.

Hinweis: Für die Berechnung von $\mathsf{E}(M_n|\mathcal{F}_m^M)$, $n > m$, kann $\mathsf{E}(\sum_{i=k}^l X_i)^3 = 0$, $1 \leq k \leq l$, $M_n = \sum_{r=0}^m S_r + \sum_{r=m+1}^n S_r - \frac{1}{3}S_n^3$ und $S_n = S_n - S_m + S_m$ verwendet werden.