Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Wolfgang Karcher

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 14

für die Übungen am 9. Februar 2011 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Ein diskretes Martingal bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$, so dass X_n bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ messbar ist und $\mathsf{E}(X_{n+1}|X_n) = X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine diskrete Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so dass $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, wobei $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n\}$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein diskretes Martingal und T eine diskrete Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass auch $\{X_{\min\{T,n\}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 2 ($2 + 3 + 4$ Punkte)

Sei $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine symmetrische zufällige Irrfahrt mit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$, so dass $\mathsf{P}(X_1 = 1) = \mathsf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Sei $T = \inf\{n : |S_n| > \sqrt{n}\}$ und $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass T eine Stoppzeit bezüglich $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(b) Zeige, dass $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $G_n = S^2_{\min\{T,n\}} - \min\{T, n\}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist. (Hinweis: Verwende Aufgabe 1)

(c) Zeige, dass $|G_n| \leq 4T$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
(Hinweis: Es gilt $|G_n| \leq |S^2_{\min\{T,n\}}| + |\min\{T, n\}| \leq S^2_{\min\{T,n\}} + T$)

Aufgabe 3 ($4 + 2$ Punkte)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathsf{E}|X_1| < \infty$. Sei $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, und sei T eine Stoppzeit bezüglich $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathsf{E}T < \infty$.

(a) Sei T unabhängig von $X_1, X_2, \ldots$. Leite eine Formel für die charakteristische Funktion von $S_T = \sum_{i=1}^T X_i$ her und weise damit die Waldsche Identität nach, d. h. $\mathsf{E}S_T = \mathsf{E}T\mathsf{E}X_1$.

(b) Sei zusätzlich $\mathsf{E}X_1 = 0$ und $T = \inf\{n : S_n < 0\}$. Verwende Theorem 2.1.3 aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass $\mathsf{E}T = \infty$. (Hinweis: Widerspruchsbeweis)