Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Wolfgang Karcher

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 15

für die Übungen am 16. Februar 2011 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $Z_1, Z_2, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i$ fast sicher konvergiert. Sei $a_1, a_2, \dots$ eine monoton wachsende Folge positiver (deterministischer) Zahlen mit $a_n \to \infty$, $n \to \infty$. Zeige, dass

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} a_k Z_k \overset{f.s.}{\to} 0, \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ und $T : \Omega \to \Omega$ eine maßerhaltende Abbildung. Zeige, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} X(T^k(\omega)) = \infty \quad f.s.$$

für fast alle $\omega \in \Omega$ mit $X(w) > 0$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ und $T : \Omega \to \Omega$ eine maßerhaltende Abbildung. Zeige, dass $\mathsf{E}X = \mathsf{E}(X \circ T)$, d. h.

$$\int_\Omega X(T(\omega))\mathsf{P}(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)\mathsf{P}(d\omega).$$

(Hinweis: algebraische Induktion)

Aufgabe 4 ($2 + 2$ Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$ und P das Lebesguemaß ist. Sei $\lambda \in (0, 1)$.

(a) Zeige, dass $T(x) = (x + \lambda) \bmod 1$ eine maßerhaltende Abbildung ist, wobei $a \bmod m = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor m$ für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{Z}$ und $\lfloor\rfloor$ die Gaußklammer bezeichnet.

(b) Zeige, dass $T(x) = \lambda x$ und $T(x) = x^2$ keine maßerhaltenden Abbildungen sind.