



## Stochastik II Übungsblatt 2

für die Übungen am 03. November 2010 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

### Aufgabe 1 (1 + 2 + 1 + 4 + 2 Punkte)

Seien  $X = \{X(t), t \in T\}$  und  $Y = \{Y(t), t \in T\}$  zwei stochastische Prozesse, die auf dem selben vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  definiert sind und Werte in einem messbaren Raum  $(S, \mathcal{B})$  annehmen.

- Beweisen Sie:  $X$  und  $Y$  sind stochastisch äquivalent  $\implies \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ .
- Geben Sie ein Beispiel zweier Prozesse  $X$  und  $Y$  an, für die gilt:  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ , aber  $X$  und  $Y$  sind nicht stochastisch äquivalent.
- Beweisen Sie:  $X$  und  $Y$  sind stochastisch ununterscheidbar  $\implies X$  und  $Y$  sind stochastisch äquivalent.
- Beweisen Sie im Falle der Abzählbarkeit von  $T$ :  $X$  und  $Y$  sind stochastisch äquivalent  $\implies X$  und  $Y$  sind stochastisch ununterscheidbar.
- Geben Sie im Falle der Überabzählbarkeit von  $T$  ein Beispiel zweier Prozesse  $X$  und  $Y$  an, für die gilt:  $X$  und  $Y$  sind stochastisch äquivalent, aber nicht stochastisch ununterscheidbar.

### Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 Punkte)

Sei  $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}\}$  ein Wiener-Prozess. Welche der folgenden Prozesse sind ebenfalls Wiener-Prozesse?

- $W_1 = \{W_1(t) := -W(t), t \in \mathbb{R}\}$ ,
- $W_2 = \{W_2(t) := \sqrt{t}W(1), t \in \mathbb{R}\}$ ,
- $W_3 = \{W_3(t) := W(2t) - W(t), t \in \mathbb{R}\}$ .

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei der stochastische Prozess  $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$  gegeben, welcher aus identischen und unabhängig verteilten Zufallsvariablen mit einer Dichte  $f(x), x \in \mathbb{R}$ , besteht. Zeigen Sie, dass ein solcher Prozess nicht stochastisch stetig in  $t \in [0, 1]$  sein kann.

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel eines stochastischen Prozesses  $X = \{X(t), t \in T\}$  an, welcher stochastisch stetig auf  $T$  ist, aber nicht fast sicher stetig auf  $T$ , und beweisen Sie, warum dies so ist.