ulm university universität uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Florian Timmermann

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 3

für die Übungen am 10. November 2010 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (2 + 4 Punkte)

Im Zusammenhang mit der Stetigkeit von stochastischen Prozessen spielt das sogenannte *Kriterium von Kolmogorov* eine zentrale Rolle (siehe auch Satz 1.3.1 im Skript): Sei $X = \{X(t),\, t \in [a,b]\}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess. Falls Konstanten $\alpha, \varepsilon > 0$ und $C := C(\alpha, \varepsilon) > 0$ existieren, so dass

$$\mathsf{E}|X(t+h) - X(t)|^{\alpha} \leq C|h|^{1+\varepsilon} \tag{1}$$

für ausreichend kleines h, dann besitzt der Prozess X eine stetige Modifikation. Zeigen Sie:

(a) Falls man in Bedingung (1) die Variable $\varepsilon = 0$ fixiert, dann reicht diese Bedingung im Allgemeinen nicht zur Existenz einer stetigen Modifikation aus. *Tipp: Betrachten Sie den Poisson-Prozess.*

(b) Der Wiener-Prozess $W = \{W(t),\, t \in [0, \infty)\}$ besitzt eine stetige Modifikation. *Tipp: Betrachten Sie den Fall* $\alpha = 4$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Wiener-Prozesses W an keiner Stelle $t \in [0, \infty)$ stochastisch differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Kovarianzfunktion $C(s,t)$ eines komplexwertigen stochastischen Prozesses $X = \{X(t),\, t \in T\}$

(a) symmetrisch ist, d.h. $C(s,t) = \overline{C(t,s)}$, $s, t \in T$,

(b) die Identität $C(t,t) = \mathsf{var}\, X(t)$, $t \in T$, erfüllt,

(c) *positiv semidefinit* ist, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C(t_i, t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0.$$