Prof. Dr. Evgeny Spodarev WS 2010/2011
Dipl.-Math. oec. Florian Timmermann

Stochastik II
Übungsblatt 5

für die Übungen am 24. November 2010 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Beweisen Sie: Ein (reellwertiger) stochastischer Prozess $X = \{X(t),\, t \in [0, \infty)\}$ mit unabhängigen Zuwächsen hat bereits dann stationäre Zuwächse, wenn die Verteilung der Zufallsvariablen $X(t + h) - X(h)$ unabhängig von h ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $N = \{N(t),\, t \in [0, \infty)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass im Intervall $[0, s]$ genau i Ereignisse auftreten unter der Bedingung, dass im Intervall $[0, t]$ genau n Ereignisse eintreten, d.h. $\mathsf{P}(N(s) = i \mid N(t) = n)$ für $s < t$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Seien $N^{(1)} = \{N^{(1)}(t),\, t \in [0, \infty)\}$ und $N^{(2)} = \{N^{(2)}(t),\, t \in [0, \infty)\}$ unabhängige Poisson-Prozesse mit den Intensitäten λ_1 bzw. λ_2. Die Unabhängigkeit soll in diesem Fall bedeuten, dass die Folgen $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \ldots$ und $T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, \ldots$ unabhängig sind. Zeigen Sie, dass $N = \{N(t) := N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t),\, t \in [0, \infty)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_1 + \lambda_2$ ist.

Aufgabe 4 (*Wartezeitenparadoxon* - 7 Punkte)

Für einen Erneuerungsprozess $N = \{N(t),\, t \in [0, \infty)\}$ heißt $T(t) = S_{N(t)+1} - t$ die *Exzesszeit*, $C(t) = t - S_{N(t)}$ die *aktuelle Lebenszeit* und $D(t) = T(t) + C(t) = T_{N(t)+1}$ die *Lebensdauer* zum Zeitpunkt $t > 0$. Sei nun $N = \{N(t),\, t \in [0, \infty)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

(a) Berechnen Sie die Verteilung der Exzesszeit $T(t)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Verteilung der aktuellen Lebenszeit durch $\mathsf{P}(C(t) = t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ und die Dichte $f_{C(t)|N(t)>0}(s) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} \mathbb{1}\{s \leq t\}$ gegeben ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathsf{P}(D(t) \leq x) = (1 - (1 + \lambda \min\{t, x\})\mathrm{e}^{-\lambda x})\mathbb{1}\{x \geq 0\}$.

(d) Um $\mathsf{E}T(t)$ zu bestimmen, könnte man folgendermaßen argumentieren: Im Mittel liegt t in der Mitte des umgebenden Zwischenankunftintervalls $(S_{N(t)}, S_{N(t)+1})$, d.h. $\mathsf{E}T(t) = \frac{1}{2}\mathsf{E}(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}) = \frac{1}{2}\mathsf{E}T_{N(t)+1} = \frac{1}{2\lambda}$. In Anbetracht des Ergebnisses aus Teil (a) kann dieses Argument nicht stimmen. Wo liegt der Fehler in der Argumentation?