Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Florian Timmermann

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 6

für die Übungen am 01. Dezember 2010 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X = \{X(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} U_i,\, t \geq 0\}$. Sei $M_{N(t)}(s) = \mathsf{E} s^{N(t)}$, $s \in (0,1)$, die erzeugende Funktion des Poisson-Prozesses $N(t)$, $\mathcal{L}\{U\}(s) = \mathsf{E} \exp\{-sU\}$ die Laplace-Transformierte von U_i, $i \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{L}\{X(t)\}(s)$ die Laplace-Transformierte von $X(t)$. Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{L}\{X(t)\}(s) = M_{N(t)}(\mathcal{L}\{U\}(s)), \quad s \geq 0$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X = \{X(t),\, t \in [0,\infty)\}$ mit U_i u.i.v., $U_1 \sim \mathrm{Exp}(\gamma)$, wobei die Intensität von $N(t)$ durch λ gegeben sei. Zeigen Sie, dass für die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{X(t)\}(s)$ von $X(t)$ gilt:

$$\mathcal{L}\{X(t)\}(s) = \exp\left\{-\frac{\lambda t s}{\gamma + s}\right\}.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Schreiben Sie eine Funktion in **R** (alternativ: Java), der als Parameter ein Zeitpunkt t, eine Intensität λ und ein Wert γ übergeben werden und die als Ergebnis den zufälligen Wert eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses mit Charakteristiken $(\lambda, \mathrm{Exp}(\gamma))$ (vgl. Aufgabe 2) zum Zeitpunkt t ausgibt. *Hinweis: die Lösungen sollen als kommentierter, strukturierter und lesbarer Ausdruck abgegeben werden.*

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Der stochastische Prozess $N = \{N(t),\, t \in [0,\infty)\}$ sei ein Cox-Prozess mit Intensitätsfunktion $\lambda(t) = Z$, wobei Z eine diskrete Zufallsvariable ist, welche die Werte λ_1 und λ_2 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 annimmt. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion sowie den Erwartungswert und die Varianz von $N(t)$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben seien zwei unabhängige homogene Poisson-Prozesse $N^{(1)} = \{N^{(1)}(t),\, t \in [0,\infty)\}$ und $N^{(2)} = \{N^{(2)}(t),\, t \geq 0\}$ mit den Intensitäten λ_1 und λ_2. Weiter sei $X \geq 0$ eine beliebige nicht-negative Zufallsvariable, die von $N^{(1)}$ und $N^{(2)}$ unabhängig ist. Zeigen Sie, dass der Prozess $N = \{N(t),\, t \geq 0\}$ mit

$$N(t) = \begin{cases} N^{(1)}(t), & t \leq X, \\ N^{(1)}(X) + N^{(2)}(t - X), & t > X \end{cases}$$

ein Cox-Prozess ist, dessen Intensitätsprozess $\lambda = \{\lambda(t),\, t \geq 0\}$ gegeben ist durch

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1, & t \leq X, \\ \lambda_2, & t > X. \end{cases}$$