ulm university universität uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Florian Timmermann

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 7

für die Übungen am 08. Dezember 2010 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie eine intuitive (exakte!) Methode an um Trajektorien eines Wiener-Prozesses $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$ zu realisieren. Nutzen Sie dabei die Unabhängigkeit und die Verteilung der Zuwächse von W. Schreiben Sie zudem ein Programm in **R** zur Simulation von Pfaden von W. Zeichnen Sie drei Pfade $t \mapsto W(t,\omega)$ für $t \in [0,1]$ in ein gemeinsames Schaubild.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei der Wiener-Prozess $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$ gegeben und $L := \mathrm{argmax}_{t\in[0,1]} W(t)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{P}(L \le x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad x \in [0,1].$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\max_{r\in[0,t]} W(r) \stackrel{d}{=} |W(t)|$.

Aufgabe 3 ($4+6+4$ Punkte)

Zur Simulation eines Wiener-Prozesses $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$ können wir auch die Approximation

$$W_n(t) = \sum_{k=1}^{n} S_k(t) z_k$$

verwenden, wobei die $S_k(t)$, $t \in [0,1]$, $k \ge 1$ die *Schauder-Funktionen* sind, sowie $z_k \sim \mathcal{N}(0,1)$ u.i.v. Zufallsvariablen, und die Reihe fast sicher für alle $t \in [0,1]$ konvergiert ($n \to \infty$).

(a) Zeigen Sie, dass für alle $t \in [0,1]$ die Approximation $W_n(t)$ auch im L^2-Sinne gegen $W(t)$ konvergiert.

(b) Schreiben Sie ein Programm in **R** (alternativ: C) zur Simulation des Wiener-Prozesses $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$.

(c) Simulieren Sie drei Pfade $t \mapsto W(t,\omega)$ für $t \in [0,1]$ und zeichnen Sie diese in ein gemeinsames Schaubild. Betrachten Sie hierbei die Stützstellen $t_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$ mit $n = 2^8 - 1$.