Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Florian Timmermann

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 8

für die Übungen am 15. Dezember 2010 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 $(3+2+4$ Punkte)

Für den Wiener-Prozess $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$ definieren wir den Prozess des Maximums, welcher gegeben ist durch $M = \{M(t) := \max_{s\in[0,t]} W(s),\, t \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(a) Die Dichte $f_{M(t)}$ des Maximums $M(t)$ ist gegeben durch

$$f_{M(t)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} 1\{x \geq 0\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaft $\mathsf{P}(M(t) > x) = 2\mathsf{P}(W(t) > x)$.

(b) Erwartungswert und Varianz von $M(t)$ sind gegeben durch

$$\mathsf{E}M(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}, \quad \mathsf{var}\, M(t) = t(1 - 2/\pi).$$

Nun definieren wir $\tau(x) := \operatorname{argmin}_{s\in\mathbb{R}}\{W(s) = x\}$ als den ersten Zeitpunkt, zu dem der Wiener-Prozess den Wert x annimmt.

(c) Bestimmen Sie die Dichte von $\tau(x)$ und zeigen Sie: $\mathsf{E}\tau(x) = \infty$.

Aufgabe 2 $(2+2$ Punkte)

Sei $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse ebenfalls Wiener-Prozesse sind:

$$W_1(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ tW(1/t), & t > 0, \end{cases} \quad W_2(t) = \sqrt{c}W(t/c), \quad c > 0.$$

Aufgabe 3 (Bonusaufgabe: $4+4$ Punkte)

Es sei der Wiener-Prozess $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$ gegeben. Die Größe $Q(a,b)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess die Halbgerade $y = at + b$, $t \geq 0$, $a, b > 0$ überschreitet. Beweisen Sie:

(a) $Q(a,b) = Q(b,a)$ und $Q(a, b_1 + b_2) = Q(a, b_1)Q(a, b_2)$,

(b) $Q(a,b)$ ist gegeben durch $Q(a,b) = \exp\{-2ab\}$.