Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. oec. Florian Timmermann

WS 2010/2011

Stochastik II
Übungsblatt 9

für die Übungen am 22. Dezember 2010 von 12:00 bis 14:00 Uhr in H14

Aufgabe 1 (4 + 2 Punkte)

Gegeben sei eine reellwertige Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F und charakteristischer Funktion φ. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

(a) Falls X unbegrenzt teilbar ist, dann gilt $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. *Hinweis: Zeigen Sie, dass* $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(s)|^2 = 1$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$, *falls* $\varphi(s) = (\varphi_n(s))^n$. *Beachten Sie außerdem, dass* $|\varphi_n(s)|^2$ *wiederum eine charakteristische Funktion ist und* $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$ *für* $x > 0$ *gilt.*

(b) Geben Sie ein Beispiel (mit Begründung) für eine Verteilung an, die nicht unbegrenzt teilbar ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $X = \{X(t),\, t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess. Zeigen Sie, dass dann die Zufallsvariable $X(t)$ für jedes $t \geq 0$ unbegrenzt teilbar ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Summe von zwei unabhängigen Lévy-Prozessen wieder ein Lévy-Prozess ist, und geben Sie die zugehörige Lévy-Charakteristik an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\psi(t)}, \quad \text{wobei } \psi(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}(\cos(2^k t) - 1).$$

Zeigen Sie, dass $\varphi(t)$ die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung ist. *Hinweis: Betrachten Sie die Lévy-Chintschin-Darstellung mit Maß* $\nu(\{\pm 2^k\}) = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$.