Prof. Dr. Volker Schmidt
Henrik Hassfeld

WS 2010/11
21.10.2010

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 1

(Abgabe: Donnerstag, 28.10.2008, vor den Übungen)

Übungsblätter bitte zu zweit abgeben.
Es ist eine Anmeldung zur Vorlesung bei SLC nötig.

Aufgabe 1 (1 + 4 + 2 + 1 Punkte)
Ein technisches System bestehe aus 3 Teilsystemen, die in einem betrachteten Zeitraum zufallsbedingt ausfallen können oder nicht.

(a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω für die möglichen Zustände des Systems an. Verwenden Sie dabei die Kodierung "1" für Ausfall und "0" für Nichtausfall.

(b) Betrachten Sie die zufälligen Ereignisse A : "Genau 2 Teilsysteme fallen aus", B : "Das Teilsystem 1 fällt aus" und bestimmen Sie $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A^c$ als Teilmengen von Ω und formulieren Sie diese zufälligen Ereignisse in Worten.

(c) Bestimmen Sie die Ereignisse C : "Kein Teilsystem fällt aus", D: "Höchstens 1 Teilsystem fällt aus", E: "Mindestens 1 Teilsystem fällt aus" sowie $A \cap E$ und $E \setminus B$.

(d) Welche der Ereignisse A, B, C, D und E sind paarweise unvereinbar?

Aufgabe 2 (3 + 3 + 3 Punkte)
Sei $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen eines (nichtleeren) Grundraumes Ω. Die von $\mathcal{E}$ *erzeugte* σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ ist definiert über $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}, \mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

(b) Gegeben sei der Grundraum Ω mit den Teilmengen $A \subset B \subset \Omega$ und sei $\mathcal{E} = \{A, B\}$. Geben Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ an.

(c) Sei $(\Omega, \sigma(\mathcal{E}), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ω und $\sigma(\mathcal{E})$ aus Aufgabe 2 (b). Es gelte $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse von $\sigma(\mathcal{E})$ an.

Aufgabe 3 (3 + 2 Punkte)
Überprüfen Sie, ob die Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Wahrscheinlichkeitsräume sind.

(a) $\Omega = \mathbb{N}_0, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega); P(A) = \sum\limits_{x \in A} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \lambda > 0, A \in \mathcal{F}$,

(b) $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \sigma(\{(a,b) : -\infty < a < b < \infty\}); P(A) = 1$, falls ein endliches Intervall I existiert mit $A \subset I$ und $P(A) = 0$ sonst.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie die folgende Bonferroni-Ungleichung: Für jedes $n \geq 1$ und jede Folge $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n-1) = 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c).$$

Aufgabe 5 (2 + 2 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie:

(a) $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$,

(b) $P(A \cap B) - P(A) P(B) = P(A^c) P(B) - P(A^c \cap B)$.