Prof. Dr. Volker Schmidt
Gerd Gaiselmann, Aaron Spettl

WS 2010/11
13.01.2011

# Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

## Übungsblatt 10

(Abgabe: Donnerstag, 20.01.2011, vor den Übungen)

**Aufgabe 1** (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei $X$ eine Zufallsvariable. Berechnen Sie das 2. Moment und die Varianz von $X$, falls

(a) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.
(Hinweis: $\mathbb{E}X = \mu$ darf benutzt werden.)

(b) $X \sim Poi(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(c) $X \sim Exp(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(d) $X \sim Bin(n, p)$ mit Parametern $p \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$.

(e) $P(X > t) = \exp\{-\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\}, \quad t > 0, T > 0$.

(f) $F_X(x) = \left(1 - 0.8e^{1-x}\right) \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}, \quad x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Sei $X$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X_1 = e^{-X}$, $X_2 = 2X$ und $X_3 = \max\{X, 1/3\}$.

**Aufgabe 3** (2 + 2 Punkte)
Ein Anleger verfügt am Beginn einer Periode über 100 000 Euro. Er investiert 60 000 Euro in eine Anlagemöglichkeit, die eine zufallsabhängige Rendite $X$ mit $\mathbb{E}X = 0.08$ und $\operatorname{Var} X = 0.0004$ besitzt. Die restlichen 40 000 Euro legt er zur zufallsabhängigen Rendite $Y$ mit $\mathbb{E}Y = 0.06$ und $\operatorname{Var} Y = 0.0001$ an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Vermögens $Z$ am Ende der Periode, wenn $X$ und $Y$

(a) unabhängige Zufallsvariablen sind,

(b) den Korrelationskoeffizienten $-0.3$ besitzen.

**Aufgabe 4** (2 + 2 + 2 Punkte)
Seien $X, Y, Z$ quadratisch integrierbare Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$, dass

$$\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a \operatorname{Cov}(X, Z) + b \operatorname{Cov}(Y, Z)$$

und

$$\operatorname{Cov}(Z, aX + bY) = a \operatorname{Cov}(Z, X) + b \operatorname{Cov}(Z, Y) .$$

(b) Zeigen Sie: Wenn $X$ und $Y$ identisch verteilt sind, dann sind $X - Y$ und $X + Y$ unkorreliert.

(c) Seien $X$ und $Y$ unabhängig und $Bin(1, p)$-verteilt, $0 < p < 1$. Sind dann $X - Y$ und $X + Y$ unabhängig?