Prof. Dr. Volker Schmidt
Gerd Gaiselmann, Aaron Spettl

WS 2010/11
27.01.2011

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 12

(Abgabe: Donnerstag, 03.02.2011, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 3 Punkte)
Sei $Y \sim U[0,1]$, zeigen Sie:

(a) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n = n\,\mathbb{1}_{[0,1/n]}(Y)$ gilt $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{L^1} 0$.

(b) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n = \mathbb{1}_{[0,1/2+1/n]}(Y)$ und $X = \mathbb{1}_{[1/2,1]}(Y)$ gilt $X_n \xrightarrow{d} X$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{P} X$.

(c) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n \sim U[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n]$ und $X = 1/2$ gilt $X_n \xrightarrow{d} X$. Außerdem gilt **nicht** $F_{X_n}(1/2) \to F_X(1/2) = 1$ für $n \to \infty$. Ist dies ein Widerspruch zur Aussage $X_n \xrightarrow{d} X$?

(d) Sei $\{X_n\}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, wobei X_n Beroulli-verteilt ist mit Parameter $\frac{1}{n}$. Zeigen Sie, dass $\{X_n\}$ im L^2, jedoch **nicht** fast sicher, gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Konvergenzaussagen für $n \to \infty$:

(a) Ist $X_n \sim \text{Exp}(n)$, dann gilt $X_n \xrightarrow{P} 0$.

(b) Für die Folge $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ von unabhängigen, identisch $U(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen und $Y_n = n \cdot \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ gilt $Y_n \xrightarrow{d} Z$ mit $Z \sim Exp(1)$.

(c) Sei $\{Y_n\}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$, und sei $X_n = \frac{1}{n} Y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $\{X_n\}$ fast sicher gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 Punkte)
Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für die Folge $\{X_n\}$ von unabhängigen, identisch $U(0,\theta)$-verteilten Zufallsvariablen mit $\theta > 0$ gilt $\max\{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow{P} \theta$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge in (a) auch fast sicher und im L^1 gegen θ konvergiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $\{X_n\}$ eine monoton wachsende Folge von Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Folge fast sicher gegen eine Zufallsvariable X konvergiert, falls $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ gilt.