Prof. Dr. Volker Schmidt
Gerd Gaiselmann, Aaron Spettl

WS 2010/11
03.02.2011

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 13

(Abgabe: Donnerstag, 10.02.2011, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 + 4 Punkte)
Sei $\{X_n, n \geq 2\}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log(n)}\,, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log(n)}\,.$$

(a) Genügt die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen?

(b) Genügt die Folge dem starken Gesetz der großen Zahlen?

Aufgabe 2 (2 + 4 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \dots : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2 < \infty$. Für $n \geq 2$, sei $Y_n = 1/n \cdot (X_1 + \dots + X_n)$ und $Z_n = 1/(n-1) \sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - Y_n)^2$.
Zeigen Sie, dass

(a) $\mathbb{E}Z_n = \sigma^2$.

(b) $Z_n \xrightarrow{\text{f.s.}} \sigma^2$.

Aufgabe 3 (2 + 4 Punkte)
Es sei $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ eine stetige Funktion mit Integral

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Sei $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die $U[0,1]$-verteilt sind und sei

$$Z_n = \mathbb{I}_{\{Y_n \leq f(X_n)\}}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i \xrightarrow{\text{f.s.}} I$ für $n \longrightarrow \infty$.

(b) Wie groß muss n mindestens sein, so dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$ mit Wahrscheinlichkeit 0.95 maximal um 0.01 von I abweicht?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Folge $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n \sim \text{Poi}(n\lambda)$. Zeigen Sie unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes, dass gilt:

$$\frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{d} X \qquad \text{mit} \quad X \sim N(0,1)\,.$$

Aufgabe 5 (5 Zusatzpunkte)
Benutzen Sie das starke Gesetz der großen Zahlen um eine Näherung für die Zahl π zu bestimmen. Benutzen Sie hierfür R oder ein anderes Programm. Bestimmen Sie eine Näherung für 1000, 10000 bzw. 100000 simulierte Werte. Geben Sie einen Ausdruck Ihres Programms ab.