Prof. Dr. Volker Schmidt
Henrik Hassfeld

WS 2010/11
11.11.2010

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 4

(Abgabe: Donnerstag, 18.11.2010, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es werden nacheinander zwei Münzen geworfen. Die Ereignisse A, B, C und D seien gegeben durch

- A : die zuerst geworfene Münze zeigt Kopf
- B : es erscheint mindestens einmal Kopf
- C : es erscheint mindestens einmal Zahl
- D : die zweite Münze zeigt Kopf

Überprüfen Sie jeweils, ob die folgenden Ereignisse unabhängig sind (mit Begründung):
(a) A und C; (b) A und D; (c) B und C; (d) B und D

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Eine Münze wird dreimal geworfen, wobei "Zahl" mit Wahrscheinlichkeit p und "Kopf" mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ erscheint. Betrachten Sie die Ereignisse $A = \{$höchstens einmal Kopf$\}$ und $B = \{$alle drei Würfe sind gleich$\}$. Für welche Werte von $p \in [0,1]$ sind A und B unabhängig?

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es seien X und Y zwei beliebige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $g(X)$ für jede stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wieder eine Zufallsvariable ist, ebenso wie $|X|, X+Y$, $\min\{X,Y\}$, $\max\{X,Y\}$ und $X \cdot Y$.
Hinweis: Es darf benutzt werden, dass stetige Funktionen Borel-messbar sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable mit $p_i = \mathbb{P}(X = i) = c \cdot q^i$ für $i = 1, 2, ...$ und $0 < q < 1$.

(a) Bestimmen Sie c, so dass $\{p_i\}$ eine Zähldichte bildet.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X$ ist gerade$)$.

(c) Bestimmen Sie die Zähldichte der Zufallsvariablen $Y = \min\{X, 8\}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $k = 0, 1, \ldots, n$ gilt

$$\frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ falls } N, S \to \infty, \frac{S}{N} \xrightarrow[S,N\to\infty]{} p,\ p \in (0,1)\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $k = 0, 1, \ldots$ gilt

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ falls } n \to \infty \text{ und } p \to 0 \text{ mit } np \to \lambda,\ \lambda \in (0,\infty)\,.$$

Aufgabe 6 (7 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine Zufallsvariable X genau dann geometrisch verteilt ist, falls X positiv und ganzzahlig ist und die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$P(X = n+k \mid X > n) = P(X = k) \qquad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}.$$

Beantworten Sie zudem die folgende Frage: Wenn beim wiederholten Wurf einer fairen Münze nach zwanzig Versuchen "Kopf" noch nicht erschienen ist, ist dann die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Versuch "Kopf" zu erhalten, größer als 1/2?