Prof. Dr. Volker Schmidt
Henrik Hassfeld

WS 2010/11
18.11.2010

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 5

(Abgabe: Donnerstag, 25.11.2010, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 Punkte)
Die Zufallsvariable X sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Einzelwahrscheinlichkeiten $p_k = P(X = k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, folgende Rekursionsgleichung gilt: $p_k = \lambda\, k^{-1}\, p_{k-1}$ für alle $k > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $k_0 \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $p_k < p_{k+1}$ für alle $k < k_0$ und $p_k \geq p_{k+1}$ für alle $k \geq k_0$.

(c) Bestimmen Sie $k^* \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $p_{k^*} = \max\limits_k p_k$ und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißen stochastisch äquivalent, falls

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$$

Zeigen Sie : Zwei stochastisch äquivalente Zufallsvariablen besitzen die gleiche Verteilung und die Umkehrung ist i. a. falsch.

Aufgabe 3 (4 + 4 Punkte)

(a) Ein Würfel wird viermal geworfen. Die Zufallsvariable X_1 gebe an, wie oft die Augenzahl echt kleiner als 3 ist. Geben Sie eine geeignete Darstellung von $X_1 : \Omega \to C$ mit einem entsprechenden Grundraum Ω und Wertebereich C an. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X_1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 > 2)$.

(b) Sei $p \in [0, 1]$. Die Zufallsvariable X_2 habe die Verteilungsfunktion

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1-p, & -1 \leq x < 0, \\ 1-p+\frac{1}{2}xp, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_{X_2} und berechnen Sie $P(-1 < X_2 \leq 1)$, $P(X_2 = 0)$ und $P(X_2 = -1)$.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c\, e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x}) & \text{, falls } x > 0\,, \\ 0 & \text{, falls } x \leq 0\,, \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$.

(a) Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist f eine Dichte?

(b) Bestimmen Sie die zu f gehörige Verteilungsfunktion.

(c) Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit Dichte f. Berechnen Sie $P(1 \leq X \leq 4)$ und skizzieren Sie f für $\lambda = 1$. Fügen Sie in der Skizze eine anschauliche Interpretation von $P(1 \leq X \leq 4)$ und die Verteilungsfunktion hinzu.