

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 6

(Abgabe: Donnerstag, 2.12.2010, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (1 + 2 + 2 Punkte)

Eine Glühbirne in einer Notbeleuchtung ist ununterbrochen in Betrieb bis sie ausfällt. Die Zufallsvariable X , durch die die Lebensdauer von Glühbirnen modelliert wird, sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1/6000$.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne nach 6000 Stunden ausgefallen ist?
- (b) Eine Glühbirne sei bereits 3000 Stunden in Betrieb. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie noch weitere 3000 Stunden nicht ausfällt?
- (c) Entsprechend der Sicherheitsvorschriften werden die Glühbirnen der Notbeleuchtung alle 6000 Stunden durch neue Birnen ersetzt. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Y , die die Einsatzzeit (Zeit bis zur Auswechslung oder Ausfall) einer Glühbirne beschreibt.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 2 Punkte)

- (a) Drücken Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = aX$ für $a \neq 0$ mit Hilfe der Dichte der absolutstetigen Zufallsvariablen X aus.
- (b) Zeigen Sie, dass die absolutstetigen Zufallsvariablen X und $-X$ genau dann dieselbe Verteilung besitzen, wenn $f_X(x) = f_X(-x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- (c) Bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zeigen Sie, dass $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ein Meinungsforschungsinstitut will den voraussichtlichen Stimmanteil p der Partei A ermitteln, wenn am Sonntag Bundestagswahl wäre. Dazu werden n Wahlberechtigte befragt und jeweils vermerkt, ob sie für die Partei A stimmen werden oder nicht. Wieviele Wahlberechtigte müssen mindestens befragt werden, um den Stimmanteil der Partei mit einer Sicherheit von mindestens 95% auf eine absolute Genauigkeit von $\pm 2\%$ vorhersagen zu können? (Hinweis: Zentraler Grenzwertsatz von De Moivre-Laplace und Tabelle auf der Rückseite)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Das Hotel *Zum Posthorn* hat 300 Zimmer. Aus Erfahrung ist bekannt, dass im Mittel 5% der vorbestellten Zimmer nicht belegt werden. Aus diesem Grund werden mehr als 300 Zimmerreservierungen entgegengenommen. Wieviele Bestellungen dürfen höchstens angenommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 alle Gäste ein Zimmer bekommen?

Aufgabe 5 (4 + 2 Punkte)

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ ein n -dimensionaler Zufallsvektor. Bestimmen Sie die

- (a) Dichten von X_1 und X_2 , falls $n = 2$ und $X = (X_1, X_2)$ absolutstetig ist mit gemeinsamer Dichte

$$f(x) = \begin{cases} x_2 e^{-x_2(x_1+1)} & , x_1 > 0, x_2 > 0, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) Zähldichten von $X_i, i = 1, \dots, n$, falls $X = (X_1, \dots, X_n)$ diskret ist mit Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = (k_1, \dots, k_n)) = \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \quad \forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad k_1 + \dots + k_n = m$$

wobei $0 \leq p_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n, p_1 + \dots + p_n = 1$ und $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Tabelle der Verteilungsfunktion $\Phi(x) = P(X \leq x)$, $X \sim N(0,1)$ der Standardnormalverteilung

Beispiel : $\Phi(1.96) = 0.975002$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995603	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
3,0	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999