

## Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

### Übungsblatt 7

(Abgabe: Donnerstag, 09.12.2010, vor den Übungen)

#### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei der Zufallsvektor  $(X, Y)$  mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} x(y-x)e^{-y}, & 0 \leq x \leq y < \infty, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die bedingten Dichten von  $X$  unter  $\{Y = y\}$  und von  $Y$  unter  $\{X = x\}$ .

#### Aufgabe 2 (2 + 2 + 3 Punkte)

Es sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  ein beliebiger Zufallsvektor.

- Zeigen Sie, dass jeder Teilvektor  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$  mit  $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  und  $2 \leq m \leq n$  aus unabhängigen Komponenten besteht, falls dies für den Gesamtvektor  $X$  gilt.
- Widerlegen Sie, dass aus der paarweisen Unabhängigkeit der Komponenten von  $X$  die vollständige Unabhängigkeit aller Komponenten von  $X$  folgt. (Wählen Sie z. B.  $n = 3$ .)
- Betrachten Sie den Zufallsvektor  $(X, Y)$ , dessen Wahrscheinlichkeitsfunktion durch die folgende Tabelle gegeben ist:

$(X, Y)$	-1	0	1
-1	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$
0	$\frac{5}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{3}{32}$
1	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

Zeigen Sie, dass  $X^2$  und  $Y^2$  unabhängig sind,  $X$  und  $Y$  jedoch nicht.

#### Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie mittels Induktion, dass die Summe von  $n$  unabhängigen poissonverteilten Zufallsvariablen wieder poissonverteilt ist, wobei die einzelnen Parameter nicht notwendigerweise identisch sein müssen.

#### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Eine Münze wird  $N$  mal geworfen, wobei  $N \sim \text{Poi}(\lambda)$ . Die Wahrscheinlichkeit für Kopf sei  $p$  und für Zahl  $q = 1 - p$ . Seien  $X$  bzw.  $Y$  die Anzahl von Versuchen mit Kopf bzw. Zahl. Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?

#### Aufgabe 5 (4 + 2 + 1 Punkte)

Sei  $X = (X_1, X_2)$  ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2}{4e^{-1}-1} x_1 e^{-x_2}, & \text{falls } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 < x_2 \leq x_1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bzw.  $Y = (Y_1, Y_2)$  ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte

$$f_2(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Sind  $X_1$  und  $X_2$  bzw.  $Y_1$  und  $Y_2$  unabhängig?
- Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion  $F_2(y_1, y_2)$  von  $Y_1$  und  $Y_2$ .
- Bestimmen Sie die bedingte Dichte von  $X_2$  unter der Bedingung  $\{X_1 = x_1\}$  für  $0 < x_1 \leq 1$ .